
NOTES D'ÉTUDES

ET DE RECHERCHE

INTERPRÉTATION DES SMILES D'OPTIONS

SUR PIBOR ET NOTIONNEL

AUTOUR DES ÉLECTIONS

ANTICIPÉES DE 1997

Sophie Coutant, Eric Jondeau et Michael Rockinger

Juin 1998

NER # 54



DIRECTION GÉNÉRALE DES ÉTUDES

DIRECTION GÉNÉRALE DES ÉTUDES
DIRECTION DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES ET DE LA RECHERCHE

**INTERPRÉTATION DES SMILES D'OPTIONS
SUR PIBOR ET NOTIONNEL
AUTOUR DES ÉLECTIONS
ANTICIPÉES DE 1997**

Sophie Coutant, Eric Jondeau et Michael Rockinger

Juin 1998

NER # 54

Les Notes d'Études et de Recherche reflètent les idées personnelles de leurs auteurs et n'expriment pas nécessairement la position de la Banque de France.

Interprétation des smiles d'options sur PIBOR et Notionnel autour des élections anticipées de 1997

Sophie Coutant, Eric Jondeau et Michael Rockinger*

Juin 1998

Résumé

Le but de ce papier est de comparer diverses méthodes d'extraction de la Densité Neutre au Risque (DNR) à partir d'options sur contrats futurs PIBOR et Notionnels, et d'en déduire comment les opérationnels du marché réagissent à un événement politique. On estime différentes méthodes sur cinq dates autour des élections et différentes méthodes : Black(1976), une mixture de lois lognormales (Melik et Thomas (1997)), un développement en polynômes d'Hermite (d'Abken, Madan et Ramamurtie (1996)), une méthode basée sur la maximisation de l'entropie (Bucchen et Kelly (1996)). Ces méthodes donnent des densités semblables ; toutefois, l'approche en polynômes d'Hermite, en autorisant des prix d'options mal évalués, en permettant un bon calage sur les prix observés, et en étant la plus rapide à converger est la méthode retenue pour les données que nous avons en notre possession. Cette approche permet également la construction d'options de maturité fixe. Une série d'options quotidiennes sur la période de février 1997 à juillet 1997 met en évidence que les opérateurs des deux marchés prévoient les élections anticipées quelques jours précédents l'annonce officielle, et qu'une part d'incertitude politique était encore présente un mois après les élections. L'incertitude a évolué avec les prévisions des sondages sur le gouvernement futur.

*Les deux premiers auteurs sont de la Banque de France. Le dernier auteur de HEC School of Management et de la Banque de France. Vous pouvez faire parvenir des commentaires au dernier auteur à Department of Finance, 78351 Jouy-en-Josas, France, ROCKINGER@HEC.FR. Rockinger remercie la Fondation HEC et la Communauté Européenne TMR Grant : "Financial Market Efficiency and Economic Efficiency". Nous remercions Pierre Sicsic pour ses précieux commentaires. Les données utilisées nous ont aimablement été procurées par MATIF S.A.. Ce papier ne reflète pas nécessairement les vues de la Banque de France.

1 Introduction

Une bonne partie de la littérature suivant les travaux originaux sur l'évaluation des options de Black-Scholes (1973) et Merton (1973) a supposé que le processus suivi par le prix de l'actif sous-jacent d'une option peut être décrit par une diffusion lognormale. Des études empiriques sur la volatilité implicite des options, tels que Rubinstein (1994), montrent que des options de même maturité, mais de prix d'exercice différents ont des volatilités différentes, effet que l'on note *smile* de volatilité. Ce phénomène apparaît lorsque l'actif sous-jacent subit des sauts ou des mouvements de volatilité et vient en contradiction avec les hypothèses des modèles de Black-Scholes et Merton. Dans ce cas, l'option peut ne pas être parfaitement couverte, ce qui implique que les anticipations des opérationnels du marché jouent un rôle important.

Depuis les travaux de Harrison et Kreps (1979) et ceux de Harrison et Pliska (1981), on sait montrer que sous certaines hypothèses assez faibles, il existe une Densité Neutre au Risque (DNR) qui permet l'évaluation d'une option à l'aide d'une espérance conditionnelle. Cette DNR est liée aux anticipations des agents du marché sur le processus du prix futur dans un environnement neutre au risque. Comme l'on montré Campa, Chang et Reider (1997a), ou Söderlind et Svensson (1997), une fois cette densité obtenue, il est possible de calculer les moments et de construire des intervalles de confiance, dont l'évolution est un indicateur des perceptions futures des participants du marché. Il est clair qu'à cause de l'existence d'une prime de risque éventuellement variante dans le temps, les DNR diffèrent des densités sous la probabilité historique. Néanmoins, la DNR joue un rôle important comme outil pour évaluer la crédibilité d'une Banque Centrale. Les DNR sont également nécessaires à un investisseur qui a besoin de mesurer comment les marchés sont susceptibles d'évoluer à travers le temps. Les DNR peuvent également donner une mesure objective des variations extrêmes du prix de l'actif sous-jacent, qui est utile en terme de gestion de risque¹.

Dans cette étude, nous étudions le contenu en information dans les options sur contrat futur de taux PIBOR (Paris Interbank Offered Rate) et d'obligation notionnelle. Alors que les instruments basés sur le PIBOR peuvent reproduire les mouvements des taux d'intérêt à court terme, l'obligation notionnelle, instrument fictif de maturité entre 7 et 10 ans, est capable de capturer les mouvements de taux long terme. Ainsi, une première contribution est l'utilisation d'une base de données à laquelle on a prêté moins d'attention qu'aux données anglaises et américaines².

Une contribution supplémentaire de cette recherche est la comparaison de quatre méthodes d'estimation de la DNR, en les appliquant aux données réelles. D'abord, le modèle de référence est celui de Black (1976) qui suppose une DNR lognormale. En second, on considère un modèle de mélange de lois lognormales développé par Melik et Thomas (1997) qui donnent également une méthode pour évaluer les options américaines. Ce modèle est également étudié par Bahra (1996), Campa, Chang et Reider (1997a). Le troisième modèle est celui d'Abken, Madan et Ramamurtie (1996) qui mettent en œuvre l'idée exposée par Madan et Milne (1994) qui font un développement en polynômes d'Hermite de la DNR. Enfin, une dernière méthode consiste à faire une approximation de la DNR par une fonction dont on cherche à maximiser l'entropie sous des contraintes liées aux données. Cette dernière approche a été développée par Bucchen et Kelly (1996). A notre connaissance, ce papier est le premier à tester cette méthode sur des options sur contrats futurs de taux et d'obligation. Dans la littérature sur l'entropie, Stutzer (1996) suggère une procédure bayésienne, dont la première étape donne une estimation de la densité à partir des prix historiques de l'actif sous-jacent.

Une autre littérature repose sur les modèles structurels à sauts comme Malz (1996,

¹ A l'instar d'une littérature qui s'est intéressée à la question de l'évaluation des options sous volatilité non constante (Derman et Kani (1994), Dumas, Fleming et Whaley (1996), Dupire (1994), Shimko (1993), ou encore Stein et Stein (1991)), nous étudions la question du contenu en information dans des options de différentes maturités.

² Probablement parce que le marché est moins liquide, il est nécessaire de filtrer les données. Ces filtres peuvent s'appliquer à des données de même qualité sur d'autres marchés.

1997) ou à volatilité stochastique avec sauts comme Bates (1991, 1996a, 1996b, 1997). Ces méthodes ont été appliquées avec succès aux données de change et d'actions. On renvoie également à Campa, Chang et Reider (1997b), Jondeau et Rockinger (1997) pour une comparaison de méthodes sur les taux de changes.

Il existe encore d'autres approches pour estimer la DNR. Rubinstein (1994) et Jackwerth et Rubinstein (1996) proposent une méthode reposant sur les arbres binomiaux. Aït-Sahalia et Lo (1995) proposent une méthode non paramétrique basée sur l'analyse des séries temporelles et l'estimation par les kernels. Breeden et Litzenberger (1978) remarquent qu'appliquer la règle de Leibnitz aux prix d'options mène aussi aux DNR. Cette observation a mené Shimko (1993) à ajuster des splines cubiques sur le *smile* puis à utiliser la relation de Breeden et Litzenberger pour extraire la DNR. De façon similaire, Neuhaus (1995) travaille avec les densités cumulées. Nous ne testons pas ces méthodes, qui sont certainement efficaces, car l'intérêt principal de notre recherche est le contenu en information dans les options, attendu que la comparaison des méthodes nous assure que la méthode retenue est semblable aux autres.

Puisque les options sur PIBOR sont des options à échéances fixes, dont la maturité évolue entre un et douze mois, nous discutons les différentes possibilités de construire des options standardisées, i.e. des options de même maturité. On peut ainsi avoir une comparaison des anticipations des participants du marché à travers le temps en évitant la difficulté qui est que les options de différentes maturités peuvent produire une prime.

En utilisant une base de données de février 1997 à juillet 1997, on est capable de déduire l'influence des élections anticipées de 1997 sur le marché financier français. L'étude nous permet de mettre en évidence que les marchés ont réagi fortement à l'annonce des élections, bien que l'information se soit glissée au sein des marchés avant l'annonce. Les marchés ont également été influencés par les sondages avant les premier et second tours électoraux. A la suite de l'étude de Bates (1997) sur les options sur indices boursiers après le crash de 1987, ou Malz (1996) sur les options de change, nous sommes capables de mettre en évidence un peso-problème : les participants du marché mettent une forte volatilité sur un événement qui n'est pas arrivé dans un passé récent, tel qu'une forte augmentation des taux d'intérêt.

Le papier est structuré de la façon suivante. Dans la section suivante, nous décrivons les méthodes utilisées pour obtenir les DNR. Dans la section 3, nous commençons par la description des données. On compare ensuite les diverses méthodes pour cinq dates choisies. Après avoir trouvé un modèle satisfaisant (l'expansion en polynômes d'Hermite) on l'applique à la base entière et on analyse le message contenu dans les options sur PIBOR et Notionnel. Les conclusions sont présentées en section 4.

2 Comment obtenir une densité neutre au risque ?

Soient C et P les notations utilisées pour les prix d'une option d'achat et d'une option de vente. Soient r , t , τ , T , K respectivement, le taux d'actualisation sans risque, la date d'aujourd'hui, la date d'expiration, la maturité de l'option ($\tau = t+T$) et le prix d'exercice. Soit F_t le prix aujourd'hui du contrat futur. Par la suite, on aura besoin des notations suivantes C_i , $i = 1, \dots, m$, le prix d'un *call* européen de prix d'exercice K_i , et $c_i(x) = (x - K_i)^+$, le payoff associé³. On note également les options PIBOR et notionnel respectivement par les indices Pi et No .

Les résultats d'Harrison et Kreps (1979), d'Harrison et Pliska (1981), ou du livre de Duffie (1998) p.115, garantissent l'existence d'une Densité Neutre au Risque $q(\cdot)$ telle que le prix d'un call et d'un put peuvent être obtenus à l'aide d'une espérance conditionnelle :

$$C = e^{-rT} \int_{F_\tau=K}^{\infty} (F_\tau - K)^+ q(F_\tau, \theta) dF_\tau \quad (1)$$

³ $(X)^+$ prend la valeur X si $X > 0$, 0 sinon.

$$P = e^{-rT} \int_0^{F_\tau=K} (K - F_\tau)^+ q(F_\tau, \theta) dF_\tau \quad (2)$$

où θ est un vecteur de paramètres qui décrit la distribution.

Il existe différentes approches pour obtenir la DNR. Il est possible de supposer un modèle *structural* comme Black (1976) où l'on suppose que le prix *forward* suit un brownien géométrique. Par des arguments d'arbitrage, Black et Scholes (1973) en déduisent la densité neutre au risque. L'observation de la volatilité à travers le *smile* implique que l'hypothèse sur le sous-jacent est insuffisante et que la modélisation directe de la DNR d'une façon paramétrique pourrait fournir des éléments de compréhension supplémentaire.

2.1 Outil d'évaluation des options sur contrats futurs

Dans cette recherche, on travaille avec des options sur PIBOR et Notionnel qui sont des options américaines sur contrats futurs où l'actif sous-jacent est soit un taux d'intérêt, soit une obligation. Comme il est résumé dans l'ouvrage de Musiela et Rutkowski (1997), chap. 14, des modèles structurels d'évaluation ont été développés pour les produits dérivés de taux et les options sur obligation. Pour les options, une évidence anecdotique suggère que les opérateurs utilisent le modèle de Black de 1976 (avec éventuellement une amélioration *ad hoc*) et utilisent rarement leur droit d'exercice anticipé. Puisque l'intérêt de cette étude porte sur la construction d'un indicateur simple des anticipations des participants du marché, nous avons choisi de négliger le caractère américain des options et de nous focaliser sur les modèles dans le même esprit que Black⁴.

2.2 Le modèle de référence de Black

Le modèle d'évaluation d'option de Black suppose que la dynamique de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique $dF_t = \sigma F_t dW_t$ où σ représente la volatilité instantanée et W_t est un mouvement brownien dans un monde neutre au risque.

Pour une telle dynamique la densité neutre au risque s'écrit

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma\sqrt{T}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x) - \ln(F_t) + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right)^2 \right], \quad (3)$$

c'est-à-dire une lognormale de moyenne $\ln(F_t) - 0.5\sigma^2 T$ et de variance $\sigma^2 T$. Comme précisé ci-dessus, il est possible d'évaluer des options sur Notionnel à l'aide de la formule de Black (1976). Cette formule pour des options européennes sur contrat futur est donnée par :

$$\begin{aligned} C^{No}(F_t, K, T, r, \sigma) &= e^{-rT} \{ F_t \Phi(d_1^{No}) - K \Phi(d_2^{No}) \} \\ P^{No}(F_t, K, T, r, \sigma) &= e^{-rT} \{ -F_t \Phi(-d_1^{No}) + K \Phi(-d_2^{No}) \} \\ d_1^{No} &= \frac{\ln(F_t/K) + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2^{No} &= d_1^{No} - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

où Φ représente la fonction de répartition d'une loi normale univariée, de moyenne nulle et de variance unité.

Sous les hypothèses de Black, ces formules s'appliquent à l'option PIBOR. Pour l'option sur PIBOR, on doit prendre en compte le fait que le contrat futur sous-jacent est coté en 100 moins le taux sous-jacent. En appliquant

$$\begin{aligned} C^{Pi}(F_t, K, T, r, \sigma) &= P^{No}(100 - F_t, 100 - K, T, r, \sigma) \\ P^{Pi}(F_t, K, T, r, \sigma) &= C^{No}(100 - F_t, 100 - K, T, r, \sigma) \end{aligned}$$

il est possible d'évaluer des options PIBOR ou d'en déduire des options la volatilité implicite.

⁴On testera la pertinence empirique de négliger le côté américain de l'option.

Comme nous l'avons dit en section 2.1, on néglige la possibilité d'exercice anticipé qui est connue pour avoir une valeur (Stoll et Whaley (1993) p.184-190). Cette valeur est due au fait que l'exercice anticipé d'une option donne à son propriétaire le contrat futur et un ajustement éventuel de la marge. Il est possible d'adapter (en partie) les formules de Black aux options américaines en utilisant l'approximation proposée par Barone-Adesi et Whaley (1987). Pour mesurer l'importance de l'effet américain, nous avons écrit cette correction. On a ensuite calculé les prix de call et de put, en utilisant les volatilités implicites données par le MATIF, avec et sans la correction. La différence en pourcentage est plus importante pour des prix d'exercice plus bas que pour des prix d'exercice plus grands, et plus importante pour des maturités longues que pour des maturités courtes. Pour les options sur PIBOR (Notionnel) la différence sur les prix des options étant toujours inférieure à 1.13% (0.13%) nous avons décidé de poursuivre en négligeant l'effet américain.

2.3 Méthodes non structurelles d'estimation de la DNR

2.3.1 Une approximation de la DNR par un mélange de lois lognormales

Une première façon assez naturelle d'obtenir la densité neutre au risque est de suivre l'idée de Bahra (1996), Melick et Thomas (1997), ou Söderlind et Svensson (1997) qui l'écrivent comme un mélange de L lois lognormales pondérées

$$q(F_\tau, \theta) = \sum_{j=1}^L \alpha_j a_j(F_\tau) \quad (4)$$

où les α_j sont constants⁵. Le paramètre θ contient les α_j ainsi que les paramètres qui caractérisent $a_j(\cdot)$, à savoir la moyenne μ_j et la variance annualisée σ_j^2 .

Il s'ensuit que le prix d'un call européen peut s'écrire comme :

$$C = e^{-rT} \sum_{j=1}^L \alpha_j \int_{F_\tau=K}^{\infty} (F_\tau - K)^+ a_j(F_\tau, \theta) dF_\tau.$$

La forme de la densité a est donnée par (3). Dans ce modèle le prix du call (1) a la forme analytique suivante⁶ :

$$C = e^{-rT} \sum_{j=1}^L \alpha_j \left\{ \exp\left(\mu_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2 T\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln K - \mu_j - \sigma_j^2 T}{\sigma_j \sqrt{T}}\right) \right] - K \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln K - \mu_j}{\sigma_j \sqrt{T}}\right) \right] \right\}.$$

On impose la contrainte supplémentaire que dans un univers neutre au risque le prix *forward* doit être égal au prix espéré à l'échéance.

$$F_t = \sum_{j=1}^L \alpha_j \exp\left(\mu_j + \frac{1}{2}\sigma_j^2 T\right).$$

Cette contrainte peut être imposée avec un Lagrangien. Après l'estimation des paramètres, il est possible de construire la DNR avec (4).

⁵On peut éventuellement utiliser d'autres distributions que la lognormale.

⁶Johnson, Kotz et Balakrishnan (1994), p241 montrent que si $F \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors

$$E[F/F > K] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{1 - \Phi(U_0 - \sigma)}{1 - \Phi(U_0)}, \text{ où } U_0 = \frac{\ln(K) - \mu}{\sigma}.$$

En observant que

$$\int_{F_\tau=K}^{\infty} (F_\tau - K)^+ a(F_\tau) dF_\tau = (E[F_\tau/F_\tau > K] - K)P(F_\tau/F_\tau > K)$$

on retrouve une formule, équivalente, au sens numérique du terme à la formule de Black.

2.3.2 Une approche paramétrique à partir des polynômes d'Hermite

Les fondements théoriques de cette méthode (HER) sont posés dans Madan et Milne (1994), et mis en application par Abken, Madan et Ramamurtie (1996) aux options sur futurs Eurodollars. Leur modèle est construit de la façon suivante. D'abord, ils supposent que l'actif sous-jacent suit une diffusion lognormale

$$dF_t = \mu F_t dt + \sigma F_t dW_t, \quad (5)$$

où W_t est un mouvement brownien par rapport à une densité de référence $\phi(\cdot)$ supposée normale centrée réduite. Ceci implique, si l'on applique le lemme d'Itô à (5) que

$$F_\tau = F_t \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma\sqrt{T}z\right) \quad (6)$$

où $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

La densité $p(\cdot)$ du processus de prix observé est obtenue par un premier changement de probabilité : $p(z) = \nu(z)\phi(z)$. A partir des données, on peut estimer $p(z)$ et donc $\nu(z)$. La densité neutre au risque est donnée par un autre changement de probabilité tel que $q(z) = \phi(z)\lambda(z)$. La principale difficulté de leur travail réside dans l'estimation de $\lambda(z)$.

La clé de cette approche est que la mesure de référence étant une normale, les composantes du prix de l'option peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires des polynômes d'Hermite. Soient $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ ces polynômes. Ils forment une base orthogonale pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int f(z)g(z)dz$ ⁷.

Puisque sous la mesure de référence, $\phi(z)$, la dynamique de l'actif sous-jacent est parfaitement définie, Madan et Milne montrent qu'il est possible d'écrire n'importe quel payoff, tel que celui du *call* par exemple, comme :

$$(z - K)^+ = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(z).$$

Les a_k sont bien définis et leur expression dépend de μ, σ, T, τ .

Par ailleurs, il est possible d'écrire $\lambda(z)$ dans la base comme $\lambda(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j h_j(z)$. En appliquant (1) et la propriété d'orthogonalité des polynômes d'Hermite, le prix d'un *call* peut s'écrire

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k,$$

où $\pi_k = e^{-rT} b_k$ sont interprétés comme les prix implicites du risque associé au polynôme h_k . Puisque le polynôme d'Hermite d'ordre k dépend du k -ième moment, nous appellerons π_3 et π_4 les prix de la *skewness* et de la *kurtosis*.

Dans un but pratique, la somme infinie peut être tronquée au quatrième ordre. Madan et Milne (1994) montrent alors que la densité neutre au risque peut s'écrire

$$q(x) = \phi(x) \left[b_0 - \frac{b_2}{\sqrt{2}} + \frac{3b_4}{\sqrt{24}} + \left(b_1 - \frac{3b_3}{\sqrt{6}}\right)x + \left(\frac{b_2}{\sqrt{2}} - \frac{6b_4}{\sqrt{24}}\right)x^2 + \frac{b_3}{\sqrt{6}}x^3 + \frac{b_4}{\sqrt{24}}x^4 \right], \quad (7)$$

où les b_i sont les paramètres à estimer. On peut soit estimer $\pi_k, k = 1, \dots, 4$ soit comme le font Abken, Madan et Ramamurtie (1996) imposer $\pi_0 = e^{rT}, \pi_1 = \pi_2 = 0$ et estimer μ et σ . Dans la partie empirique de cette étude, on imposera encore une fois μ par la restriction de martingale $E_q[F_\tau/F_t] = F_t$ et on estimera seulement σ et la valeur future des troisième et quatrième prix du risque. On déduit la densité neutre au risque de F_τ par un changement de variable.

⁷Le polynôme d'Hermite de degré k est défini comme solution de l'équation $H_k(x) = (-1)^k \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k} \frac{1}{\phi(x)}$ où ϕ est de moyenne nulle et de variance un. Après avoir standardisé les polynômes H_k , on peut écrire les quatre premiers polynômes : $h_0(x) = 1, h_1(x) = x, h_2(x) = (x^2 - 1)/\sqrt{2}, h_3(x) = (x^3 - x)/\sqrt{6}, h_4(x) = (x^4 - 6x^2 + 3)/\sqrt{24}$.

Ils montrent aussi que pour deux maturités disjointes T et T' on doit avoir la relation suivante

$$\frac{\pi_k(T)e^{rT}}{T^{k/2}} = \frac{\pi_k(T')e^{rT'}}{T'^{k/2}}. \quad (8)$$

Même dans le cas où cette restriction est rejetée, on peut l'utiliser pour déterminer l'information d'options de maturités fixes.

2.3.3 Estimation de la DNR par maximisation de l'entropie

Une méthode fondée sur le principe du maximum d'entropie (ME) est introduite en finance par Buccen et Kelly (1996), Stutzer (1996). Son origine se situe dans les travaux de Shannon (1948) qui relie la notion d'entropie en thermodynamique à l'information. Jaynes (1957, 1982) plus tard étend ce concept à l'inférence statistique. Comme Buccen et Kelly le citent : *Jaynes argued along the lines of Gibbs, that the distribution that maximizes the Entropy, subject to the constraints, is the one that is least committal with respect to unknown or missing information and is, hence, also the least prejudiced.*

La définition générale de l'entropie est

$$E = - \int_0^{+\infty} q(x) \ln(q(x)) dx \quad (9)$$

où $q(\cdot)$ représente toujours la DNR. L'entropie peut être vue comme une distance, dont la maximisation donnera une DNR contenant le maximum d'information.

Avec les notations de la Section 2 les contraintes peuvent s'écrire comme

$$\int_0^{+\infty} q(x) dx = 1 \quad (10)$$

$$\int_0^{+\infty} c_i(x) q(x) dx = e^{rT} C_i \quad (11)$$

où (10) assure que q est une densité et (11) relie la DNR au i -ème prix de *call*.

La restriction de martingale impose la condition suivante

$$\int_0^{+\infty} x q(x) dx = F_t \quad (12)$$

où F_t est le prix *forward*. La condition (12) peut s'écrire sous la même forme que (11) avec la notation $c_0(x) = x$ et $C_0 = e^{-rT} F_t$.

A la suite de Shannon, la maximisation de l'entropie sous les contraintes (10) à (12) est une façon naturelle d'obtenir la DNR. Pour mettre en œuvre cette approche on cherche à maximiser le Hamiltonien

$$H(q) = - \int_0^{+\infty} q(x) \ln(q(x)) dx + (1+\gamma) \left(\int_0^{+\infty} q(x) dx - 1 \right) + \sum_{i=0}^m \lambda_i \left(\int_0^{+\infty} c_i(x) q(x) dx - e^{rT} C_i \right).$$

En définissant

$$\mu = \frac{1}{\exp(\gamma)} = \int_0^{\infty} \exp \left(\sum_{i=0}^m \lambda_i c_i(x) \right) dx \quad (13)$$

la DNR est alors égale à

$$q(x) = \frac{1}{\mu} \exp \left(\sum_{i=0}^m \lambda_i c_i(x) \right), \quad (14)$$

auquel cas l'entropie devient

$$\begin{aligned} E(\lambda_0, \dots, \lambda_m) &= \int_0^{\infty} q(x) \left[-\ln \mu + \sum_{i=0}^m \lambda_i c_i(x) \right] dx \\ &= -\ln \mu + \sum_{i=0}^m \lambda_i e^{rT} C_i. \end{aligned} \quad (15)$$

A ce stade, nous devons préciser comment estimer l'entropie. Bucchen et Kelly (1996) montrent que la différentiation partielle de E mène à

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda_i} = - \int_0^{+\infty} c_i(x)q(x)dx + e^{rT} C_i, \quad \forall i = 0, \dots, m. \quad (16)$$

Ceci implique que si nous avons un extremum pour l'équation (15), les conditions (10) à (11) sont vérifiées.

Inversement, la DNR peut être obtenue en résolvant un système à $m+2$ équations non linéaires obtenues en remplaçant (14) dans (10)-(11). Des simplifications supplémentaires sont obtenues en intégrant de façon explicite les différents termes; les détails des calculs sont donnés en appendice.

De (14) on peut remarquer que la méthode ME donnera par construction des fonctions exponentielles par parties. On observe également que la méthode ME est une méthode exacte au sens où étant données m options et la restriction de martingale, il y a exactement $m+1$ segments qui composent la DNR. Une conséquence de ceci est que si l'une des options est mal évaluée, ceci se reflétera sur le segment de la DNR correspondant.

2.3.4 DNR et options standardisées

Comme nous allons le montrer dans la section empirique, les options produisent une structure par terme de la volatilité et des mouvements complexes des moments d'ordre plus élevé lorsque la maturité évolue. La comparaison des DNR à travers le temps est donc compliquée, et nécessite les quelques remarques que nous faisons ci-après.

Butler et Davies (1998), qui construisent des DNR en utilisant l'approche MIX, suggèrent une interpolation linéaire comme meilleur moyen pour extraire de l'information d'options de maturité constante. Ils construisent donc d'abord des moments pour des maturités fixes, et font une interpolation linéaire sur ces moments. Ensuite pour obtenir des DNR de maturité constante, ils utilisent une combinaison convexe des DNR existant où les poids sont reliés à la maturité. Puisque l'approche MIX n'est pas structurelle, on ne peut trouver une meilleure approche. Aussi, l'utilisation de cette technique est délicate pour obtenir de l'information d'options de maturités à l'extérieur de celles qui existent car cela impliquerait une extrapolation qui pourrait mener à des densités négatives.

Parmi les autres méthodes de cette étude, ME est également un modèle complètement non structurel. Cela implique pour la méthode ME, l'information pour des horizons fixes peut s'obtenir par une interpolation linéaire sur les moments ou les DNR.

Pour la méthode des polynômes d'Hermite, comme l'approche est plus structurelle, une fois les paramètres estimés pour une seule maturité, en utilisant (8) il est possible de déduire l'information des autres maturités⁸. En théorie il est même possible de tirer de l'information d'options dont la maturité dépasse la dernière maturité existant, et de même d'options dont la maturité est inférieure à la plus courte. Pour nos données, sans test formel, pour un jour donné, les termes de gauche et droite de (8) ont pris différentes valeurs selon la maturité. Il est donc effectivement possible d'utiliser une extrapolation avec (8) pour obtenir des prévisions sur les π_k pour toutes les maturités existant et d'en faire la moyenne.

3 Résultats empiriques

Nous introduisons d'abord les données utilisées. Puis, en nous concentrant sur cinq dates autour des élections anticipées de 1997 nous comparons les méthodes présentées plus tôt. Nous discuterons enfin du type d'information contenu dans des options sur PIBOR et Notionnel dans un contexte de séries temporelles.

⁸On peut également utiliser les données de plusieurs maturités et tester (8). Abken, Madan et Ramamurtie (1996) le font et rejettent cette restriction.

3.1 Les données

Les données d'options sur PIBOR et Notionnel et leurs contrats futurs sous-jacents nous ont été procurées sans problème par le MATIF et couvrent la période du 3 février 1997 au 30 juillet 1997⁹.

3.1.1 Quelques propriétés des options PIBOR...

Il existe cinq *market makers* pour les contrats futurs PIBOR 3-mois¹⁰. Avec une présence permanente sur le marché, ils ont le devoir de coter toutes les positions ouvertes à la demande d'un participant du marché ou d'un superviseur de change. Ils doivent coter un minimum de 100 contrats avec un écart offre/demande de 5 points de base pour tous les prix d'exercice des deux premières échéances. Le nominal est de 5 millions de francs.

Les *market makers* des options sur contrats futurs PIBOR 3-mois sont les mêmes que pour les contrats sous-jacents. Toutes les options sont de type américain. La cotation s'opère en 100 moins le pourcentage de la valeur du nominal avec 3 décimales. Les prix d'exercice sont des entiers multiples de 10 bp. Il existe au moins 15 cotations autour de la monnaie. A chaque instant il y a 4 maturités cotées dont les échéances tombent en mars, juin, septembre et décembre. Les options dans la monnaie sont exercées automatiquement le dernier jour de *trading*. Celui-ci tombe le deuxième jour ouvré précédant le troisième mercredi du mois de livraison à 11h00. La date d'expiration du contrat est la même que celle de son contrat sous-jacent.

3.1.2 ... et des options sur Notionnel

Pour les dates considérées dans ce papier, l'obligation notionnelle a un taux facial de 10% et est constituée d'une obligation du Gouvernement Français 7 à 10 ans de valeur nominale 500000FF¹¹. Les contrats notionnels sont les contrats cotés sur le MATIF les plus liquides.

L'option sur Notionnel est de type américain. Sa cotation se fait en pourcentage du nominal avec deux décimales. Le prix d'exercice est un entier multiple de 100 bp, et au moins 9 autour de la monnaie sont cotés. Les échéances sont semblables à celles du PIBOR.

Il y a également cinq *market makers*¹². Pour les options sur contrat notionnel, les *market makers* ont le devoir de fournir en continu des cotations pour les prix d'exercice autour de la monnaie, et à la demande soit d'un *market maker*, soit d'un superviseur de change, ils doivent cotés les autres prix d'exercice. Pour assurer un prix cohérent, pour un minimum de 100 contrats les *markets makers* doivent coter un écart offre/demande maximum de 10 points de base pour les 9 prix d'exercice entourant la monnaie. Le fait que les *market makers* soient tenus pour les options sur PIBOR et Notionnel, de donner des cotations avec des *spreads* raisonnables, assure que même en présence de volume de transaction faible, il y aura de l'information sur les anticipations des agents.

Comme le CME, le MATIF applique le système de compensation dans lequel la prime de l'option doit être payée au moment où l'option est achetée. C'est la différence avec le LIFFE où les options subissent le système des appels de marges¹³.

3.1.3 Le rôle de MATIF S.A.

Le MATIF en tant que chambre de compensation obtient chaque jour des volatilités implicites pour un certain nombre de prix d'exercice de référence. Dans l'optique de couvrir une large palette de prix d'exercice, ils font une interpolation linéaire à l'intérieur de cette

⁹Des détails sur l'organisation du MATIF se trouvent sur la page-web : <http://www.matif.fr/>.

¹⁰BNP, Caisse Nationale du Crédit Agricole, CPR, Société Générale et Transoptions Finance.

¹¹Cette obligation fictive peut s'obtenir par un portefeuille d'OAT (Obligations Assimilables du Trésor). Depuis décembre 1997 le taux facial de l'obligation notionnelle est de 5.5%.

¹²Qui sont les mêmes que le PIBOR à l'exception de la CNCA qui est remplacée par Indosuez.

¹³Une conséquence intéressante des appels de marges est que l'exercice anticipé disparaît et que l'option américaine peut être évaluée en européenne (voir Chen et Scott (1993)).

palette. A l'extérieur, ils supposent une volatilité constante qui correspond à celle du dernier prix d'exercice coté. Puis ils appliquent le modèle de Black avec ces volatilités pour déduire un prix d'option. Même si cette approche peut être utilisée dans un but de compensation, dans une optique empirique ces données vont contenir beaucoup de bruit. Les figures 1 à 4 tracent les volatilités en fonction des *strikes* pour deux dates choisies¹⁴.

Les symboles des différentes courbes correspondent aux données du MATIF. Comme il n'y a aucun symbole sur la ligne droite, on peut en déduire que ces points ont été obtenus par interpolation linéaire. Donc, seuls les symboles correspondant à un maillon peuvent être considérés comme de la véritable information. On note également que le MATIF ne donne pas systématiquement des volatilités interpolées. Par exemple, le 14 avril 1997, sur l'option PIBOR ayant la plus grande échéance, une volatilité est fournie pour les strikes 96.0 et 96.2 mais pas pour 96.1. Ces observations impliquent que les méthodes utilisées pour extraire de l'information devraient autoriser éventuellement une mauvaise évaluation des options, et que l'on doit filtrer les données avant de les exploiter.

Ces figures ont une signification économique. Quand on considère les options sur PIBOR de même maturité dans les figures 1 et 2, on note que les options de différents prix d'exercice ont des volatilités implicites différentes. Cette propriété est appelée précisément le *smile* de l'option. On remarque aussi le déplacement vertical des *smiles* lorsque les maturités changent. C'est ce que l'on appelle une structure par terme de volatilité. Pour le 14 avril 1997, une semaine avant l'annonce officielle des élections, les plus hautes maturités sont associées aux plus hautes volatilités¹⁵. Nous parlerons du 14 avril comme d'une date *normale*. Si l'on regarde le 26 mai, lendemain du premier tour des élections, on observe une structure par terme inversée de la volatilité, traduisant la pensée que les opérateurs étaient très méfiants concernant le futur proche.

Des exemples de volatilités implicites des options sur Notionnel sont donnés par les figures 3 et 4. On note que les options sur notionnel sont moins liquides que les options sur PIBOR. Le plus petit niveau de volatilité fait apparaître que les obligations notionnelles ont une volatilité plus petite que le taux PIBOR. Enfin, on observe que pour les deux dates, la courbure du *smile* n'est pas très marquée. Ceci implique que le Notionnel ne réagit pas aussi fortement aux événements que le PIBOR.

3.2 Comparaison des méthodes d'estimation des DNR

Dans cette section, nous cherchons à comparer en quelques lignes les différentes méthodes. Dans un but pratique la méthode doit être rapide, prendre en compte le fait que les données peuvent être faussées, et donner des résultats stables, i.e. il ne doit pas y avoir de difficulté numérique à trouver un optimum global.

Plutôt que d'utiliser la base entière, on sélectionne à ce stade, cinq dates précises. Le lundi 14 avril 1997, une semaine avant l'annonce officielle de la dissolution de l'Assemblée. Le lundi 21 avril, lendemain de l'annonce. Le 26 mai, premier lundi ouvré après le premier tour des élections. Il était alors évident que l'opposition pouvait remporter les élections. Ensuite, nous avons choisi le 2 juin, lendemain du second tour des élections. A cette date, on sait que le Gouvernement d'Alain Juppé a perdu et que les partis socialiste et communiste ont remporté les élections. Enfin, nous avons choisi une dernière date, le lundi 9 juin, une semaine après le second tour.

3.2.1 Mise en œuvre des méthodes

Le modèle de référence (LN) et HER ont été estimés par une méthode NLLS séparément chaque jour, pour chaque maturité, en résolvant le problème de minimisation

¹⁴Pour simplifier les figures, les extrapolations à un niveau de volatilité constant à gauche et à droite ont déjà été retirées.

¹⁵Comme nous le montrons plus loin, à cette date, les participants n'avaient pas encore anticipé la possibilité d'élections.

suivant :

$$\sum_{i=1}^m (C_i - \widehat{C}_i)^2, \quad (17)$$

où C_i est le prix observé de l'option d'achat et \widehat{C}_i est le prix théorique donné par un certain modèle. Cela signifie que l'on a préalablement transformé les prix de *puts* en prix de *calls* par la *parité call-put*¹⁶.

Pour mettre en place le modèle du mélange de lois lognormales (MIX), on ajoute à (17) une pénalité de Lagrange faisant intervenir la distance entre le prix du futur aujourd'hui et l'espérance du prix.

La mise en œuvre de la méthode du maximum de l'entropie (ME) nous a posé un problème. Comme cette méthode est une méthode exacte, et comme certains prix sont seulement des interpolations linéaires, on est souvent incapable d'obtenir la convergence de cette méthode. Quand elle convergeait, on s'est aperçu que les DNR étaient constituées de bosses. Pour faire face au problème, on a décidé de filtrer les données en enlevant toutes les interpolations linéaires dans le *smile* et de ne garder que les options pour lesquelles le *smile* avait un maillon. Cela a énormément amélioré l'estimation de ME.

Pour rester cohérent, nous avons appliqué aussi ce filtre à toutes les méthodes, mais nous n'avions alors plus un nombre de prix d'exercice suffisant pour estimer les paramètres du modèle.

Donc nous avons décidé d'estimer la méthode ME sur des données filtrées et les autres méthodes avec tout l'ensemble des données (en étant sûrs que pour chaque maturité, nous avions au moins autant de strikes que de paramètres).

Pour valider la robustesse de nos paramètres, nous estimons chaque méthode avec un ensemble de 20 valeurs initiales différentes obtenues comme valeurs aléatoires avec assez d'écart-type pour être sûrs de couvrir un large éventail de valeurs initiales possibles¹⁷. A ce stade, il est important de noter la difficulté rencontrée pour trouver un minimum local pour le modèle MIX.

3.2.2 Le calibrage du modèle

Les tableaux 1 et 2 comparent les MSE (*Mean Squarred Errors* définies par $MSE = \frac{10^4}{m-n} \sum_{i=1}^m (C_i - \widehat{C}_i)^2$ où n est le nombre de paramètres de la méthode) et les ARE (*Average Relative Error* définies par $ARE = \frac{1}{m-n} \sum_{i=1}^m ((C_i - \widehat{C}_i)/C_i)^2$). Les MSE doivent augmenter avec les prix d'options et permettent la comparaison de méthodes pour un type d'option donné. Les ARE permettent de comparer sur un ensemble de données en reliant l'erreur à la taille du prix de l'option.

Les tableaux 1 et 2 ne font pas apparaître les erreurs pour la méthode ME puisque, par construction, cette méthode est une méthode exacte ; il n'y a donc pas de terme d'erreur. On note dans chaque table que le modèle de Black (LN) donne un très mauvais calage. Ce calage s'améliore quand on passe au mélange de lois. Enfin, il devient vraiment satisfaisant pour le modèle HER.

3.2.3 Qui est champion ?

A ce stade, les méthodes que nous préférons sont HER et ME. Pour donner plus de clarté sur la contribution relative de ces méthodes, nous considérons en tableau 3 les

¹⁶Le fait que les prix d'options ne soient pas exactement ceux de Black-Scholes impliquent l'existence d'imperfections sur le marché, donc que les options ne peuvent pas être parfaitement couvertes et que la parité call-put peut dans certains cas ne plus être valable. Pour vérifier la qualité de nos résultats, on utilise séparément les options d'achat et les options de vente et essayons diverses méthodes. On obtient des résultats semblables à ceux reportés. Une explication possible est que la parité call-put marché assez bien puisque son application ne met en jeu que les payoffs à l'échéance alors que la couverture entraîne des portefeuilles localement sans risque, ce qui n'existe pas si le processus des prix admet des sauts ou des variations de volatilité.

¹⁷Les calculs ont été faits sur un Pentium II 300MHz.

comportements des volatilités, *skewness* et *kurtosis* pour les options PIBOR. On note un niveau de volatilité semblable à travers les différentes méthodes. Les *skewness* et *kurtosis* ont des niveaux différents, mais pour une date donnée, la façon d'évoluer de ces deux moments est la même à travers les maturités pour MIX et HER, mais différente pour ME. Par exemple dans le cas de cette dernière, il semble y avoir une systématique diminution de la *kurtosis* pour la dernière maturité, alors que pour HER, il y a toujours une augmentation, puis une diminution (pour toutes les dates à la suite de l'annonce). Si on associe la volatilité à une incertitude économique générale, et la *kurtosis* à l'occurrence d'un événement extrême de l'actif sous-jacent, la ME implique l'arrivée d'un mouvement extrême dans l'avenir proche, alors que HER prévoit un tel événement à la suite des élections, ce qui d'un point de vue économique paraît plus raisonnable.

Un examen plus poussé du tableau 3 montre que lorsque la journée est calme, comme le 14 avril, la volatilité implicite croît avec la maturité mais la *skewness* et la *kurtosis* décroissent. On peut en déduire qu'une variation du taux d'intérêt qui pourrait être considérée comme extrême dans le court terme, devient normale dans le long terme.

Enfin, il faut remarquer que pour tous les jours et toutes les maturités, la *skewness* est toujours négative (et plus négative que pour Black). On en conclut que les opérationnels anticipaient une hausse du taux d'intérêt, plutôt qu'une baisse. Ceci est encore valable pour la date du 14 avril, impliquant la présence d'un peso-problème.

On compare les différentes méthodes en traçant dans les figures 5-8 les DNR des 14 avril et 26 mai. Un examen attentif des figures 5 et 6 pour l'option PIBOR montre que quelle que soit la date, l'une ou l'autre des méthodes donne des formes différentes (Quelle que soit la méthode considérée, on note un grand biais par rapport à la lognormalité). Il apparaît que les DNR des différentes méthodes se ressemblent plus pour les maturités courtes que pour les maturités éloignées, probablement pour des raisons de liquidité.

En ce concentrant sur la ME on remarque que cette méthode produit des DNR en pics. Comme nous l'avons précisé plus tôt, ceci est une conséquence directe de la conception de la méthode.

Si l'on regarde les figures 7-8 qui correspondent aux options sur Notionnel, on remarque que les modèles autres que le modèle de Black se comportent de façon plus similaire. Encore une fois, comme la ME ne permet pas les prix biaisés, on note des formes étranges de distribution.

Pour conclure cette section, on doit noter la difficulté que l'on a à choisir un *champion* parmi les trois méthodes. La plus connue d'entre elles, le mélange de lois lognormales, qui semble être efficace pour les taux de change (Jondeau et Rockinger (1997)), rencontre des difficultés pour converger vers un minimum global : les erreurs qui lui sont associées sont plus grandes que HER et ME. D'un autre côté, les DNR pour HER prennent parfois des valeurs négatives ; la ME donne lieu à d'étranges densités et est encore plus lente que HER pour converger. Dans notre recherche d'une méthode rapide et robuste numériquement qui permette une façon simple de construire des options à maturités fixes, comme nous l'avons dit en section 2.3.4, nous avons décidé de poursuivre notre travail avec HER seulement.

Il est à noter que dans Jondeau et Rockinger (1997), on trouvait que HER donnait des DNR très proches de celles obtenues avec les expansions d'Edgeworth développées par Jarrow et Rudd (1982), et mises en œuvre par Corrado et Su (1996). Dans ce travail nous n'avons pas testé les expansions d'Edgeworth car elles sont obtenues par une recherche moins complète que HER et il aurait été difficile d'obtenir des DNR pour des maturités fixes.

3.3 Anticipations des agents à travers le temps

Dans cette section, nous considérons le modèle des polynômes d'Hermite et la base entière pour analyser comment les anticipations des opérationnels des options sur PIBOR et notionnel ont évolué à travers le temps.

A ce stade il est nécessaire d'insister sur le fait que nous interprétons les moments dérivés des DNR comme s'ils étaient calculés dans un monde historique. Ceci repose

sur la remarque de Rubinstein (1994) : *... , despite warnings to the contrary, we can justifiably suppose a rough similarity between the risk-neutral probabilities implied in option prices and subjective beliefs.* Rubinstein justifie cette remarque par un exemple numérique. Cela signifie, en particulier pour les graphiques présentés ci-après que n'importe quel nombre peut être considéré comme une approximation du vrai nombre. Ainsi, les variations contiennent plus d'information que les niveaux historiques.

3.3.1 Options PIBOR

La figure 9 donne l'évolution des ARE à travers le temps. On note que le modèle se cale mieux pour des options de maturité plus longue¹⁸.

La figure 10 trace les erreurs standardisées des paramètres estimés. On note que pour toutes les dates, la volatilité est assez bien estimée. La *skewness* a des erreurs plus grandes, et la *kurtosis* est encore pire. Cela confirme les conclusions de Corrado et Su (1996) qui notent que la *kurtosis* est très corrélée avec la volatilité, ce qui rend son estimation difficile. On note aussi que la plupart des dates correspondant à des ARE élevées sur la figure 9 sont associées à des estimateurs moins performants de la *skewness* et *kurtosis* mais pas de la volatilité.

La figure 11 nous montre de façon originale, comment l'incertitude globale des opérateurs du marché évolue à travers le temps. On note le calme relatif des marchés jusqu'au 14 avril. La volatilité augmente la semaine précédant l'annonce officielle. Après l'annonce, le 21 avril, l'incertitude reste constante. Le 26 mai a lieu la surprise que le gouvernement pourrait changer. L'incertitude était d'autant plus accrue que les sondages révélaient la possibilité d'une victoire socialiste. Le 2 juin, on connaissait la victoire de la gauche. Comme ils ont entendu des discours rassurants sur leur position dans l'Union Economique Monétaire et leur politique économique générale, les marchés se sont apparemment calmés.

La figure 12 nous montre la *skewness* (négative) qui nous indique dans quelle direction les opérateurs anticipaient les mouvements de taux. Cette quantité est clairement plus variable que la volatilité.

En figure 13, on a tracé l'évolution à travers le temps de la *kurtosis*. Une comparaison avec la volatilité, tracée sur la figure 11, montre clairement qu'il existe une corrélation entre ces deux quantités. Les dates précédant et suivant l'annonce avaient une volatilité plus basse mais une *kurtosis* plus élevée et inversement pendant la période des élections. Les *skewness* élevées après les élections révèlent que sous le gouvernement précédent, les opérateurs étaient plus inquiets des variations anormales des taux d'intérêt. Pendant les élections, l'incertitude globale a augmenté puis baissé. Donc les *traders* étaient plus inquiets d'une variation anormale qu'avant les élections. Cela montre qu'à la fin de juillet 1997, le gouvernement était incapable de faire disparaître les peurs.

On peut analyser l'information dans un autre contexte en regardant les intervalles de confiance obtenus à partir des DNR. Soient b_i et b_s , les quantiles à 5% et 95% de la DNR. On note b_i , b_s , $b_i - b_s$ les *déviations absolues*. On obtient également les déviations en pourcentage avec

$$b_{\text{inf}} = 100\left(\frac{F}{b_i} - 1\right), b_{\text{sup}} = 100\left(\frac{b_s}{F} - 1\right), rge = 100\left(\frac{b_s - b_i}{F}\right).$$

Les déviations en pourcentage sont reliés au prix *forward* et sont des indicateurs du côté où penche la DNR.

Aussi, comme on l'a remarqué en section 2.3.4., la validité des options de différentes maturités permet la construction d'options standardisées par interpolation des paramètres.

¹⁸Nous devons noter aussi que quand nous avons estimé initialement le modèle dans un contexte, nous avons obtenu des ARE élevées pour certaines dates. Cela provenait du fait que des prix sont mal évalués. Nous avons décidé d'inclure un test dans le programme qui vérifiait la présence éventuelle de prix aberrants pour des prix d'exercice. De tels strikes ont été éliminés. Cette méthode permet un certain contrôle sur les ARE. La ME étant une méthode exacte, nous aurait donné des DNR bizarrement pointues pour ces prix sans fournir à l'économétricien une indication sur la manière de filtrer les données.

On se concentre maintenant sur les options standardisées arbitrairement à 3 mois (90 jours) et 9 mois (270 jours) de maturité. En Tableau 4, on trace les intervalles de confiance en pourcentage et en termes absolus. Les figures 16 et 17 donnent pour chaque jour ces intervalles. Pour rendre les résultats aussi simples que possible à interpréter, on transforme la cotation en $100 - F$ en taux *forward* F .

Pour la date calme on note que les opérateurs ont tendance à croire que les taux vont bouger vers le bas avec une probabilité de 90% et vers le haut avec une probabilité de 15.64% autour du taux *forward* courant avant 90 jours. Cet intervalle croît de façon évidente pour les options standardisées 9 mois.

Comme des nouvelles ont touché le marché le 21 avril, les peurs de grandes variations de taux sont apparues. Ces peurs s'accroissent après le premier tour des élections. Une semaine après le second tour, l'incertitude avait baissé, mais était toujours élevée.

La figure 16 donne une image plus intuitive de cette évolution. On note, en regardant directement les taux, que les opérateurs mettent une borne inférieure sur les taux, située entre 2.8 et 3.0%. Même si les taux *forward* ne bougent pas beaucoup, on constate de fortes variations dans la borne supérieure. Bien qu'après les élections, celle-ci diminue, elle reste élevée. La figure confirme encore que le marché était au courant des élections avant l'annonce officielle.

La figure 17 trace les intervalles de confiance pour des options de maturité 9 mois. On remarque que la bande depuis la borne inférieure est mince, alors qu'elle est large depuis la borne supérieure. L'intervalle s'est élargi tout au long de l'échantillon et s'est décalé vers le haut.

On a montré que l'étude des DNR apportait plus de clarté sur la manière d'opérer des marchés financiers et qu'elles contiennent de l'information que l'on ne peut déduire des outils traditionnels tels que la structure par terme des taux *forward*.

3.3.2 Options sur Notionnel

On se tourne maintenant vers l'analyse des options sur contrat notionnel. Une première difficulté vient du fait que pour certaines dates nous avons seulement de l'information pour une seule maturité, et pour d'autres de deux maturités distinctes. De plus, comme les options sur obligation obéissent à un comportement particulier de la volatilité, un saut intervient dans les prix lorsqu'on passe d'une maturité à l'autre. Pour cette raison, on se concentre sur les options qui ont la plus grande maturité puisque ces instruments s'avèrent être plus liquides.

En figure 18 on trace l'évolution temporelle des ARE pour l'option la plus liquide. La moyenne des ARE dans ce cas est 0.0012. Pour les options sur PIBOR, cette valeur était de 0.0235 pour la plus courte maturité et 0.0016 pour la plus longue. Le calage est donc en général plus performant pour les options sur contrat notionnel que sur contrat PIBOR.

La figure 19 montre l'évolution des erreurs standardisées des différents paramètres. On trouve un comportement similaire aux options PIBOR, i.e. la volatilité est beaucoup mieux estimée que les moments d'ordre plus élevé. Les erreurs standardisées pour la *skewness* et la *kurtosis* ne sont pas bonnes.

En figure 20 on considère le graphe de la volatilité. Comme pour le PIBOR la volatilité implicite augmente la semaine précédant l'annonce officielle des élections anticipées. A l'inverse du PIBOR, la volatilité décroît alors brutalement. Quand le premier tour des élections approche, cette volatilité continue d'augmenter mais diminue avant même que le second tour aie lieu. Après les élections la volatilité continue de baisser. Clairement, le comportement de la volatilité est plus irrégulier et on trouve une volatilité plus élevée pour le Notionnel du milieu à la fin du moi de mars.

Comme pour le PIBOR, il est possible, en utilisant les intervalles de confiance de prévoir comment vont évoluer les anticipations des agents du marché. C'est ce que l'on peut voir en tableau 5, où sont présentés les intervalles de confiance des différentes maturités. On note que le prix *forward* est plus haut pour des maturités courtes que pour les longues, lorsque deux échéances sont accessibles. La largeur des intervalles de confiance croît et

les traders s'attendaient à ce que les prix du Notionnel baissent plus qu'ils n'augmentent lorsque l'incertitude augmente.

Clairement, certaines conclusions sont dues au fait que la maturité change. Pour cette raison, on se concentre maintenant sur les options standardisées à 90 jours. Pour les jours assez liquides ou l'on a deux maturités, on choisit la plus liquide (la seconde) et on utilise la formule (8) pour extrapoler des paramètres à horizon fixe. En faisant cela, on néglige clairement la possibilité d'une structure par terme de la volatilité. La figure 21 montre l'évolution temporelle d'un prix *forward* à 90 jour interpolé et d'un intervalle de confiance à 5 et 95 %. On note que la borne inférieure en figure 21 se comporte de façon similaire à la borne supérieure des figures 16 et 17. Puisque lorsque les prix des obligations notionnelles baissent, cela implique une hausse des taux longs, on en conclut que l'information contenue dans les options sur PIBOR et Notionnel est la même. A la mi-mars, bien avant l'annonce officielle des élections, la borne inférieure devient plus petite. Après un relatif retour au calme après les élections, quand le premier tour approche la borne inférieure baisse à nouveau. Exactement comme les contrats PIBOR, les marchés redeviennent calmes avant le second tour électoral.

On peut résumer nos commentaires sur le Notionnel de la façon suivante : pour de nombreux jours il y a seulement assez d'information pour une maturité et quand il y a deux maturités assez liquides, les estimations ne sont généralement pas aussi performantes pour l'une des maturités que pour l'autre. Cela rend l'estimation pour des options standardisées plus difficile. Globalement, on a l'impression que les options sur Notionnel transmettent la même information que les options sur PIBOR, mais le message parvient avec plus de bruit.

4 Conclusion

Dans ce papier, nous examinons le contenu en information dans les options sur contrats futurs PIBOR et Notionnel durant une période où les marchés financiers étaient soumis à une forte incertitude, les élections législatives de 1997.

On considère d'abord plusieurs méthodes pour extraire les densités neutres au risque. Quelle que soit la méthode, on obtient un meilleur calage aux prix d'options qu'avec la distribution lognormale traditionnelle de Black. Finalement, on se place dans le cadre d'une approximation de la densité par un développement en polynômes d'Hermite d'abord étudié par Madan et Milne (1994). Cette méthode donne des estimateurs précis et tolère les données inexactes. Elle est rapide et ne présente aucune difficulté dans la détermination d'un optimum global. De plus, cette méthode peut être utilisée pour obtenir des options standardisées, i.e. de maturité fixe.

On applique alors cette méthode à des données allant du 3 février au 30 juillet 1997. Pour les options sur PIBOR on note que le marché anticipait que des élections allaient avoir lieu avant l'annonce officielle. Comme les sondages prévoyaient un changement de gouvernement avant le premier tour électoral, l'incertitude a augmenté. Après le second tour des élections, même quand l'incertitude sur l'avenir a diminué, le marché a continué d'avoir des craintes d'une hausse future des taux d'intérêt. On peut les expliquer par la possibilité que les marchés ont accepté la victoire socialiste mais qu'ils étaient toujours incertains sur leur programme politique. A la fin de juillet 1997, le nouveau gouvernement était toujours incapable de rassurer entièrement le marché financier sur ses intentions.

Contrairement à l'information déduite des options sur contrat PIBOR, l'information extraite des options sur Notionnel est plus délicate. Pour une date et une maturité données, peu de prix d'exercice sont cotés. Aussi, puisque le marché pour ce type d'instrument est moins liquide, on peut au plus estimer deux maturités pour une date donnée. En conséquence, la construction d'options standardisées est plus difficile et plus enclin aux erreurs. Etant donnés ces avertissements, l'information contenue dans les options sur Notionnel semble fortement corrélée à celle obtenue avec les options sur PIBOR.

Appendice

Pour mettre en œuvre la méthode du maximum d'entropie on définit $a_i \equiv \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_i$, $b_i \equiv -(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \dots + \lambda_i K_i)$, et on pose $b_0 = 0$, $K_0 = 0$, $K_{m+1} = \infty$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{a_0} (\exp(a_0 K_1 + b_0) - \exp(a_0 K_0 + b_0)) + \frac{1}{a_1} (\exp(a_1 K_2 + b_1) - \exp(a_1 K_1 + b_1)) \\ &\quad + \frac{1}{a_2} (\exp(a_2 K_3 + b_2) - \exp(a_2 K_2 + b_2)) + \dots + \frac{1}{a_m} (\exp(a_m K_{m+1} + b_m) - \exp(a_m K_m + b_m)). \end{aligned}$$

Le lemme suivant simplifie les calculs.

Lemma 1

$$\int_{K_a}^{K_b} x \exp(ax + b) dx = \left(\frac{K_b}{a} - \frac{1}{a^2}\right) \exp(aK_b + b) - \left(\frac{K_a}{a} - \frac{1}{a^2}\right) \exp(aK_a + b)$$

Des calculs directs mais longs nous donnent :

$$\begin{aligned} \mu d_i &= \int_0^{+\infty} c_i(x) \exp\left(\sum_{j=0}^m \lambda_j c_j(x)\right) dx \\ &= \sum_{k=i}^m \left[\left(\frac{K_{k+1} - K_i}{a_k} - \frac{1}{a_k^2}\right) \exp(a_k K_{k+1} + b_k) - \left(\frac{K_k - K_i}{a_k} - \frac{1}{a_k^2}\right) \exp(a_k K_k + b_k) \right]. \end{aligned}$$

Clairement, on doit choisir les paramètres tels que $a_m < 0$.

Pour obtenir de bonnes propriétés de convergence, le choix des valeurs initiales est crucial. La procédure suivante donne des valeurs initiales satisfaisantes.

D'abord on estime les paramètres en utilisant NLLS et une densité $\hat{q}(x)$ lognormale comme approximation de la densité neutre au risque. Ensuite, on évalue cette densité sur un support fini à l'aide d'une grille. Puisqu'on aimerait obtenir les λ_i tels que la densité estimée devienne le proche possible de $\hat{q}(x)$ on considère le système :

$$\begin{aligned} \hat{q}(x) &= \frac{1}{\mu} \exp\left(\sum_{i=0}^m \lambda_i c_i(x)\right) \\ \implies \ln(\hat{q}(x)) &= -\ln(\mu) + \sum_{i=0}^m \lambda_i c_i(x). \end{aligned}$$

Puisque les $c_i(x)$ sont parfaitement connus (nous avons pris x sur une grille finie) il est possible d'estimer λ_i en utilisant OLS.

Références

- [1] Abken, P., D.B. Madan et S. Ramamurtie (1996), "Estimation of risk-neutral and statistical densities by Hermite polynomial approximation : with an application to Eurodollar Futures Options", *Federal Reserve Bank of Atlanta*, mimeo.
- [2] Aït-Sahalia, Y. et A.W. Lo (1998), "Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices", *The Journal of Finance*, 53, 499-547.
- [3] Bahra, B., (1996), "Probability distributions of futures asset prices implied by option prices", *Bank of England Quaterly Bulletin*, 299-311.
- [4] Barone-Adesi, G. et R.E. Whaley (1987), "Efficient analytic approximation of American option values", *Journal of Finance*, 42, 301-320.
- [5] Bates, D. S. (1991), "The crash of '87 : Was-it expected? The evidence from options markets", *Journal of Finance*, 46(3), 1009-1044.
- [6] Bates, D. S. (1996a), "Dollar jump fears, 1984-1992, distributional abnormalities implicit in currency futures options", *Journal of International Money and Finance*, 15(1), 65-93.
- [7] Bates, D. S. (1996b), "Jumps and stochastic volatility : exchange rate processes implicit in Deutsche Mark options", *Review of Financial Studies*, 9(1), 69-107.
- [8] Bates, D.S. (1997), "Post-'87 crash fears in S&P 500 futures options", *NBER Working Paper* n°5894.
- [9] Black, F. (1976), "The pricing of commodity contracts", *Journal of Financial Economics*, 3, 167-179.
- [10] Black, F. et M. Scholes (1973), "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- [11] Breeden, D.T., et R.H. Litzenberger (1978), "Prices of state-contingent claims implicit in option prices", *Journal of Business*, 51(4), 621-651.
- [12] Bucchen, P.W. et M. Kelly (1996), "The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31(1), 143-159.
- [13] Butler, C. et H. Davies (1998), "Assessing markets views on monetary policy : the use of implied risk neutral probability distributions", *Bank of England*, mimeo.
- [14] Campa, J., P.H.K. Chang et R.L. Reider (1997a), "ERM bandwidths for EMU and after : evidence from foreign exchange options", *Economic Policy*, 24, 55-89.
- [15] Campa, J., P.H.K. Chang et R.L. Reider (1997b), "Implied exchange rate distributions : evidence from OTC options markets", *NBER Working Paper* N°6179.
- [16] Chen, R.R. et L. Scott (1993), "Pricing interest rate future options with futures-style margining", *Journal of Futures Markets*, 13, 15-22.
- [17] Corrado, C.J. et T. Su (1996), "S&P 500 index option tests of Jarrow and Rudd's approximate option valuation formula", *Journal of Futures Markets*, 16(6), 611-629.
- [18] Cox, J.C., J.I. Ingersoll et S.A. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53(2), 385-407.
- [19] Derman, E., et I. Kani (1994), "Riding on a smile", *RISK*, 7, 32-39.
- [20] Duffie, D. (1988), "Security markets : Stochastic models", *Academic Press*, Boston.
- [21] Dupire, B. (1994), "Pricing with a smile", *RISK*, 7, 18-20.
- [22] Harrison, J.M. et D. Kreps (1979), "Martingale and arbitrage in multiperiod securities markets", *Journal of Economic Theory*, 20, 381-408.
- [23] Harrison, J.M., et S. Pliska (1981), "Martingales and Stochastic Integrals in the theory of continuous trading", *Stochastic Processes and their Applications*, 11, 215-260.

- [24] Jackwerth, J.C., et M. Rubinstein (1996), "Recovering probability distributions from option prices", *Journal of Finance*, 51(5), 1611-1632.
- [25] Jarrow, R. et A. Rudd (1982), "Approximate valuation for arbitrary stochastic processes", *Journal of Financial Economics*, 10(3), 349-369.
- [26] Jaynes, E.T. (1957), "Information theory and statistical mechanics", *Physics Review*, 106, 620-630.
- [27] Jaynes, E.T. (1982), "On the rational of maximum entropy methods", *Proceedings of the IEEE*, 70, 939-952.
- [28] Johnson, N.L., S. Kotz et N. Balakrishnan (1994), "Continuous univariate distribution", vol.1, *John Wiley and Sons*, New York, 2nd ed.
- [29] Jondeau, E. et M. Rockinger (1998), "Reading the smile : The message conveyed by methods which infer risk neutral densities.", *CEPR n°2009*.
- [30] Madan, D.B., et F. Milne (1994), "Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis", *Mathematical Finance*, 4, 223-245.
- [31] Malz, A.M., (1996), "Using options prices to estimate realignment probabilities in the European monetary system", *Journal of International Money and Finance*, forthcoming.
- [32] Malz, A.M. (1997), "Options-based estimates of the probability distribution of exchange rates and currency excess returns", *Federal Reserve Bank of New-York*, mimeo.
- [33] Melik, W.R. et C.P. Thomas (1997), "Recovering an asset's implied PDF from options prices : an application to crude oil during the Gulf crisis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, 91-116.
- [34] Merton, R.C. (1973), "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183.
- [35] Musiela, M. et M. Rutkowski (1997), "Martingale methods in financial modelling", *Springer Verlag*, New York.
- [36] Neuhaus, H. (1995), "The information content of derivatives for monetary policy : Implied volatilities and probabilities", D.P. 3, *Economic Research Group of the Deutsche Bundesbank*.
- [37] Rubinstein, M. (1994), "Implied binomial trees", *The Journal of Finance*, 69, 771-818.
- [38] Shannon, C.E. (1948), "The mathematical theory of communication", *Bell System Technical Journal*, 27, 379-423.
- [39] Shimko, D. (1993), "Bounds of probability", *RISK*, 6, 33-47.
- [40] Söderlind P., et L.E.O. Svensson (1997), "New techniques to extract market expectations from financial instruments", *CEPR Discussion Paper 1556*, Janvier.
- [41] Stein, E. et J. Stein (1991), "Stock price distributions with stochastic volatility : an analytic approach", *Review of Financial Studies*, 4, 727-752.
- [42] Stoll, H. et R.E. Whaley (1990), "Futures and options : Theory and applications", *South-Western Publishing Co.*, Cincinnati, Ohio.
- [43] Stutzer, M. (1996), "A simple nonparametric approach to derivative security valuation", *Journal of Finance*, 101(5), 1633-1652.

Tableau 1. Soient C_i, \hat{C}_i respectivement les prix observés et théoriques pour une maturité donnée et un prix d'exercice $K_i, i = 1, \dots, m$ alors $MSE = \frac{10^4}{m-n} \sum_{i=1}^m (C_i - \hat{C}_i)^2$ où n est le nombre de paramètres exigés dans l'estimation, et $ARE = \frac{1}{m-n} \sum_{i=1}^m ((C_i - \hat{C}_i)/C_i)^2$. n prend la valeur 1, 4, 3 respectivement pour LN, MIX, HER.

Tableau 2. Les mesures d'erreurs MSE et ARE sont les mêmes que dans le tableau 1.

Tableau 3. Les moments pour les options PIBOR présentés dans ce tableau pour les différentes méthodes sont directement obtenues des densités neutres au risque.

Tableau 4. Intervalles de confiance pour le taux à terme PIBOR. Si F est le taux *forward*, b_i et b_s les percentiles de niveau 5% et 95% des DNR, alors

$$b_{\text{inf}} = 100 \left(\frac{F}{b_i} - 1 \right), b_{\text{sup}} = 100 \left(\frac{b_s}{F} - 1 \right), rge = 100 \left(\frac{b_s - b_i}{F} \right).$$

Les intervalles de confiance sont traduits pour des options fictives de maturités 90 et 271 jours.

Tableau 5. Intervalles de confiance pour le contrat à terme Notionnel. La construction des variables se fait de la même façon que dans le tableau 4. La maturité est celle des options.

Figure 1a. *Smiles* d'options PIBOR pour les quatre maturités du 14 avril 1997. Les symboles $\circ, \square, \triangle, +$ correspondent respectivement aux options de maturités 63, 154, 245, et 336 jours.

Figure 1b. *Smiles* d'options PIBOR pour les quatre maturités du 26 mai 1997. Les symboles $\circ, \square, \triangle, +$ correspondent respectivement aux options de maturités 56, 147, 238, et 329 jours.

Figure 1c. *Smiles* d'options sur contrat notionnel pour les deux premières maturités du 14 avril 1997. Les symboles \circ et \square correspondent respectivement aux options de maturités 45 et 136 jours.

Figure 1d. *Smiles* d'options sur contrat notionnel pour la deuxième maturité du 26 mai 1997. Les symboles \square correspondent respectivement aux options de maturités 94 jours. Il existait une option de maturité plus courte, mais elle n'a pas été retenue car le nombre de prix d'exercices était insuffisant.

date	T	m	MSE			ARE		
			LN	MIX	HER	LN	MIX	HER
970414	63	5	1.109	0.322	0.147	0.065	0.002	0.006
	154	13	0.789	0.376	0.045	0.009	0.118	0.006
	245	15	1.219	0.342	0.032	0.008	0.004	0.001
	336	12	1.662	0.394	0.253	0.009	0.003	0.004
970421	56	8	4.782	0.579	0.045	0.018	0.001	0.000
	147	12	10.039	0.016	0.005	0.049	0.002	0.000
	238	15	3.786	3.649	0.217	0.005	0.002	0.003
	329	12	2.439	1.789	0.162	0.001	0.061	0.000
970526	21	11	6.3229	0.903	0.076	0.047	0.003	0.001
	112	15	5.959	1.178	0.071	0.132	0.004	0.000
	203	13	3.875	0.300	0.034	0.030	0.014	0.000
	294	16	3.299	0.190	0.019	0.040	0.017	0.000
970602	14	11	1.614	0.066	0.016	0.256	0.011	0.004
	105	15	9.504	0.871	0.236	0.281	0.004	0.001
	196	15	4.937	11.649	0.022	0.041	0.006	0.000
	287	15	3.540	8.516	0.015	0.022	0.009	0.000
970609	98	13	10.116	3.291	0.447	0.375	0.033	0.003
	189	14	4.276	1.101	0.146	0.049	0.000	0.002
	280	16	4.389	0.614	0.063	0.039	0.006	0.000

Tableau 1 : comparaison des MSE et des ARE de différentes méthodes pour les options PIBOR.

date	T	m	MSE			ARE		
			LN	MIX	HER	LN	MIX	HER
970414	45	7	19.653	0.688	0.793	0.050	0.001	0.000
	136	7	40.982	0.090	0.030	0.012	0.018	0.000
970421	38	7	30.588	0.212	0.715	0.050	0.014	0.002
	129	7	73.165	4.151	3.435	0.016	0.005	0.000
970526	94	7	64.172	5.733	4.116	0.024	0.020	0.001
970602	87	7	74.584	0.049	0.286	0.033	0.004	0.000
970609	80	7	64.046	0.150	0.436	0.059	0.000	0.001

Tableau 2 : comparaison des MSE et des ARE de différentes méthodes pour les options Notionnel.

T	LN			MIX			HER			ME		
	σ	SK	KU	σ	SK	KU	σ	SK	KU	σ	SK	KU
970414												
63	0.390	-0.146	0.038	0.434	-1.367	4.873	0.423	-1.485	3.960	0.436	-2.588	12.147
154	0.467	-0.267	0.127	0.506	-1.351	6.147	0.497	-1.001	3.334	0.496	-1.639	6.973
245	0.631	-0.442	0.348	0.665	-1.247	3.739	0.660	-1.175	2.922	0.654	-1.203	3.166
336	0.744	-0.564	0.472	0.743	-0.905	1.308	0.732	-1.113	1.375	0.740	-0.847	1.149
970421												
56	1.500	-0.477	0.392	1.523	-1.539	2.791	1.465	-1.727	1.905	1.569	-1.468	3.978
147	1.047	-0.537	0.461	1.064	-1.794	4.143	1.075	-1.883	3.405	1.048	-1.703	1.237
238	0.921	-0.580	0.471	0.914	-1.193	2.727	0.939	-1.277	3.409	0.934	-1.090	2.625
329	0.918	-0.588	0.303	0.844	-0.364	1.518	0.852	-0.455	1.763	0.885	-0.684	1.605
970526												
21	2.371	-0.450	0.350	2.430	-1.629	3.301	2.373	-1.727	2.547	2.416	-1.578	3.628
105	1.241	-0.532	0.426	1.260	-1.367	2.153	1.247	-1.506	2.041	1.240	-1.391	2.468
196	0.931	-0.536	0.427	0.949	-1.353	2.621	0.963	-1.407	2.520	0.926	-1.304	2.764
287	0.899	-0.566	0.345	0.881	-1.078	1.523	0.883	-1.141	1.564	0.876	-1.031	1.492
970602												
14	1.442	-0.235	0.098	1.524	-1.632	4.146	1.506	-1.460	2.838	1.580	-1.885	7.533
105	1.145	-0.507	0.437	1.201	-1.732	3.830	1.206	-1.877	3.605	1.189	-1.686	3.703
196	0.898	-0.538	0.470	0.924	-0.997	1.699	0.954	-1.596	3.698	0.921	-1.471	3.557
287	0.820	-0.567	0.460	0.828	-0.874	1.395	0.824	-1.285	2.378	0.815	-1.157	2.185
970609												
98	0.932	-0.406	0.294	1.037	-2.199	7.210	1.014	-2.077	4.749	1.023	-2.036	5.932
189	0.833	-0.502	0.434	0.880	-1.522	3.927	0.883	-1.581	3.487	0.867	-1.515	3.661
280	0.786	-0.557	0.482	0.794	-1.379	2.768	0.801	-1.425	2.673	0.789	-1.307	2.731

Tableau 3 : volatilité, skewness et kurtosis des différentes méthodes pour les options PIBOR.

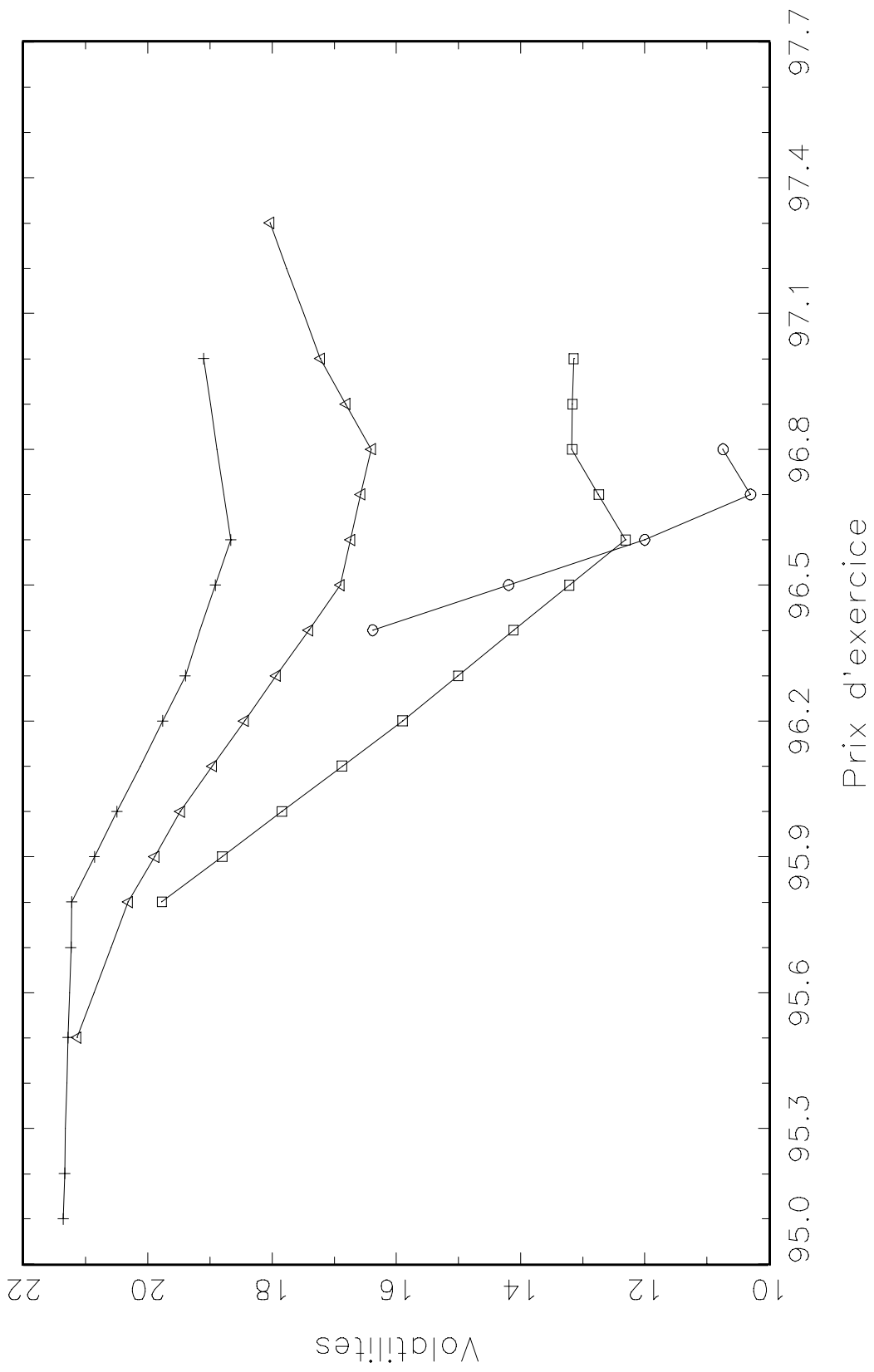
date	T	F	Déviation en pourcentage			Déviation absolue		
			b _{inf}	b _{sup}	rge	b _i	b _s	b _s -b _i
970414	90	3.35	8.25	15.64	23.27	3.10	3.88	0.78
	270	3.57	26.16	31.20	51.93	2.83	4.68	1.85
970421	90	3.68	24.61	40.64	60.39	2.95	5.17	2.22
	270	3.69	41.39	36.38	65.66	2.61	5.03	2.42
970526	90	3.78	35.13	48.77	74.77	2.80	5.62	2.83
	270	3.77	30.31	37.08	60.34	2.90	5.17	2.28
970602	90	3.62	25.25	41.68	61.85	2.89	5.13	2.24
	270	3.67	30.48	40.08	63.44	2.81	5.13	2.33
970609	90	3.58	16.89	35.47	49.92	3.06	4.85	1.79
	270	3.62	60.73	39.62	63.13	2.77	5.06	2.29

Tableau 4 : intervalles de confiance neutres au risque en pourcentage et en valeur absolue pour les options sur contrat PIBOR calculés avec l'ajustement des polynômes d'Hermite.

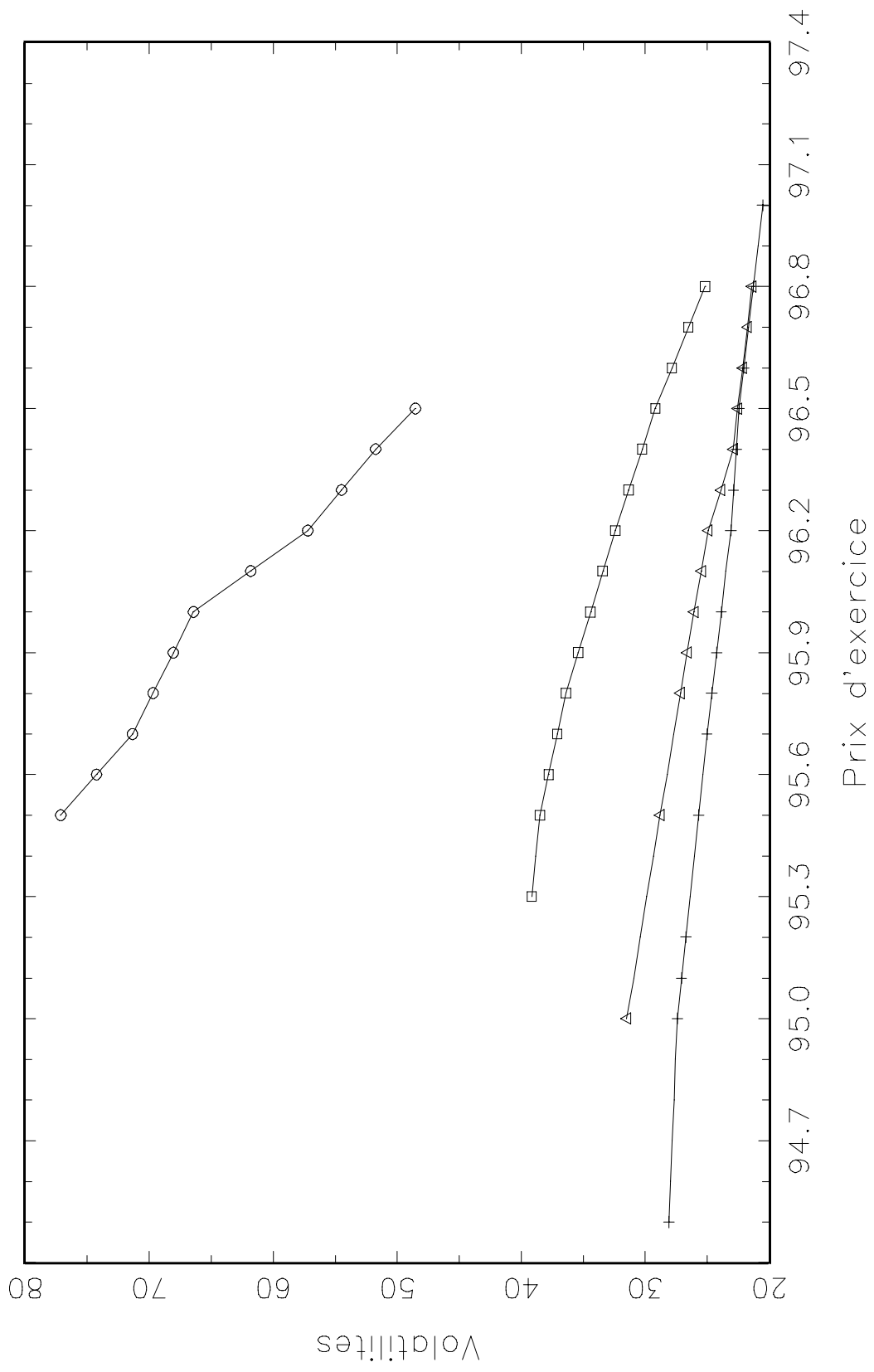
date	T	F	Déviation en pourcentage			Déviation absolue		
			b _{inf}	b _{sup}	rge	b _i	b _s	b _s -b _i
970414	45	128.24	3.24	2.53	5.66	124.22	131.48	7.26
	136	126.58	5.92	4.71	10.30	119.50	132.54	13.04
970421	38	128.28	3.52	2.63	6.03	123.92	131.66	7.74
	129	126.74	6.43	4.73	10.78	119.08	132.74	13.66
970526	94	126.78	5.79	4.23	9.70	119.84	132.14	12.30
970602	87	126.96	5.41	3.89	9.03	120.44	131.90	11.46
970609	80	127.92	4.73	3.39	7.91	122.14	132.26	10.12

Tableau 5 : intervalles de confiance neutres au risque en pourcentage et en valeur absolue pour les options sur contrat Notionnel calculés avec l'ajustement des polynômes d'Hermite.

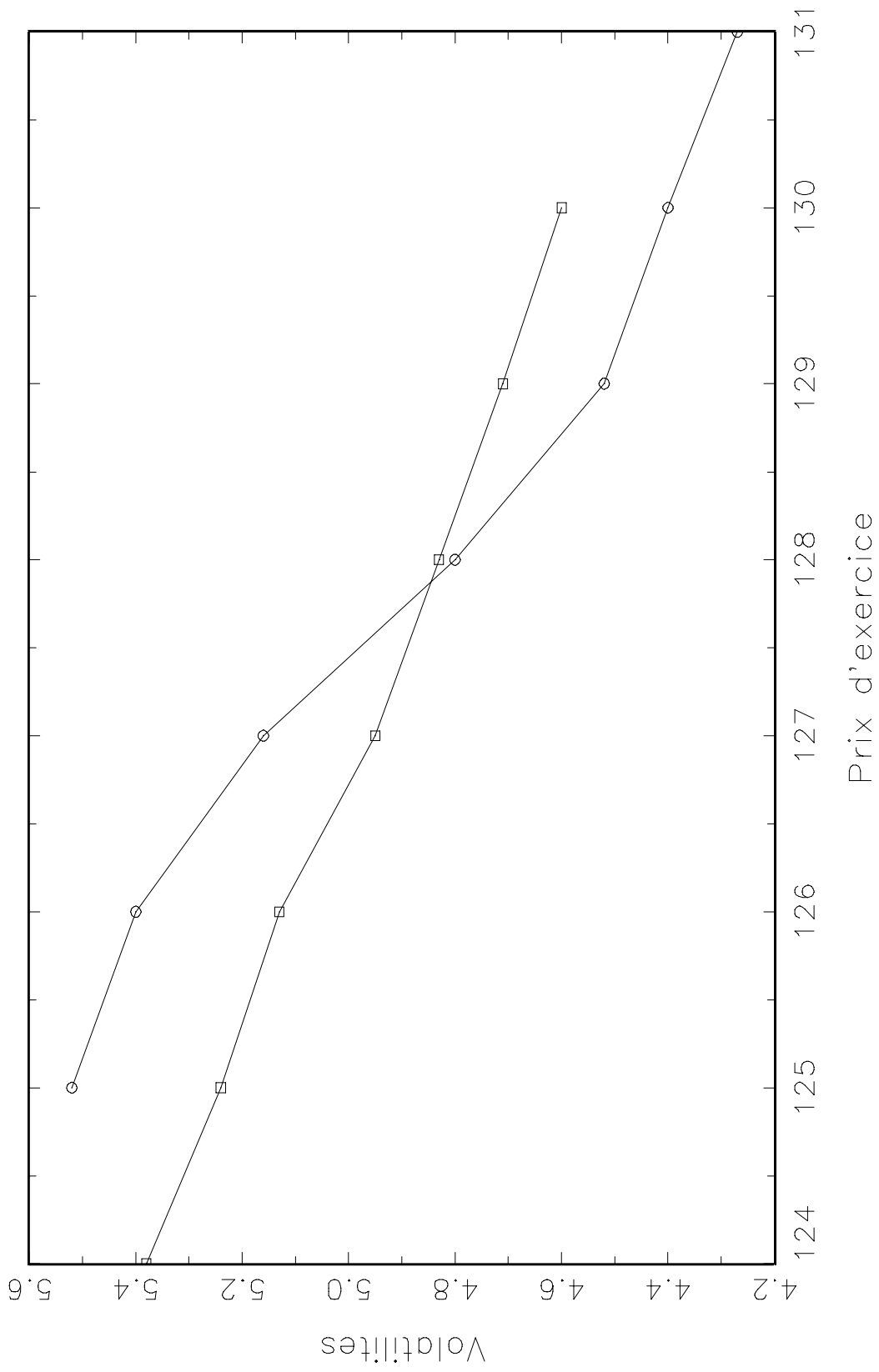
Smile de volatilité pour les options PIBOR 970414



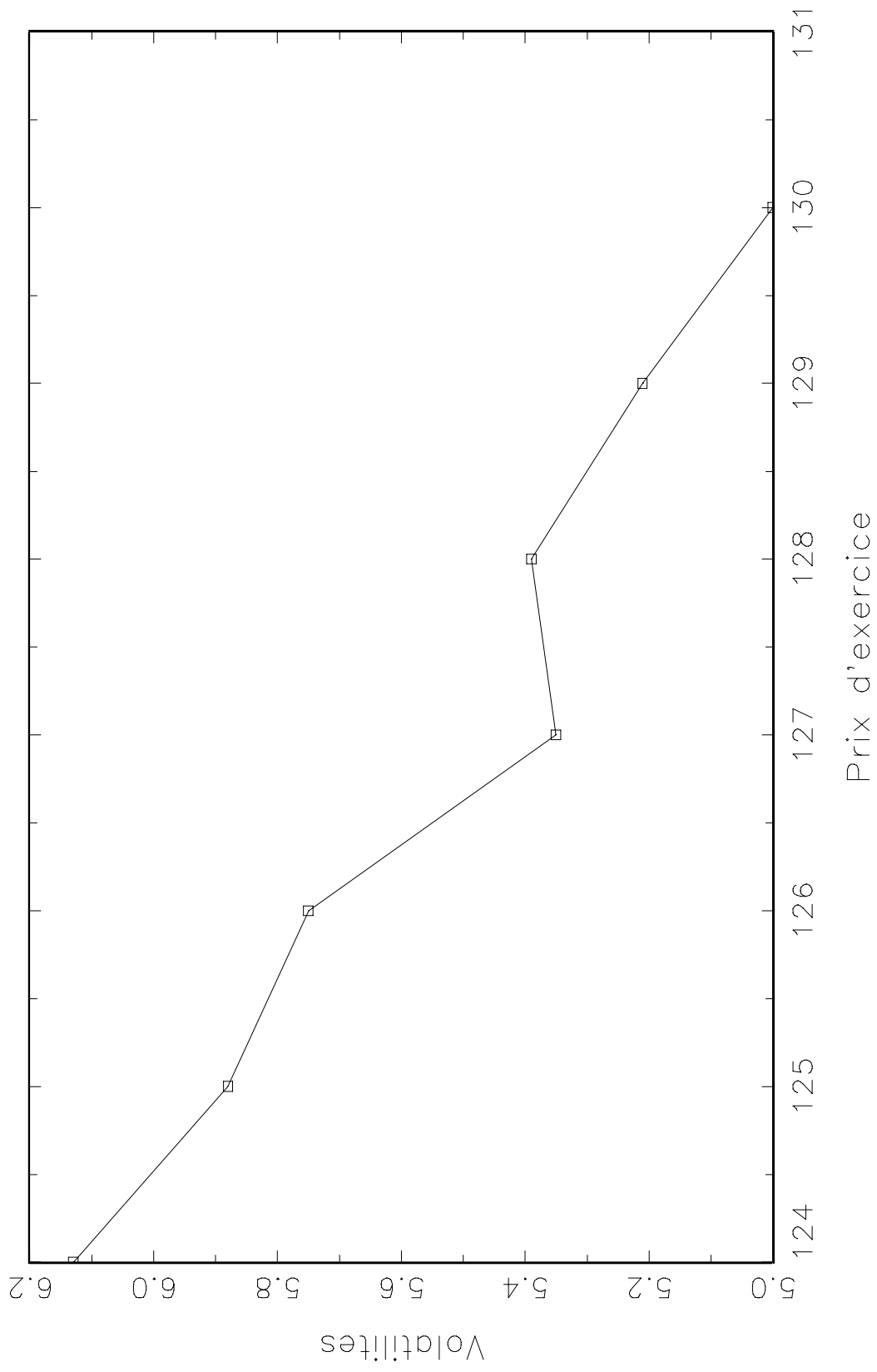
Smile de volatilité pour les options PIBOR 970526



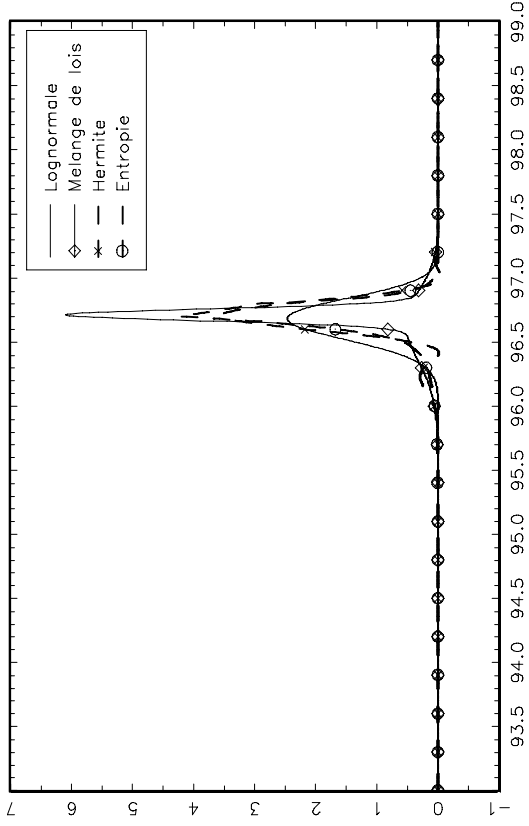
Smile de Volatilité pour les options sur Notionnel 970414



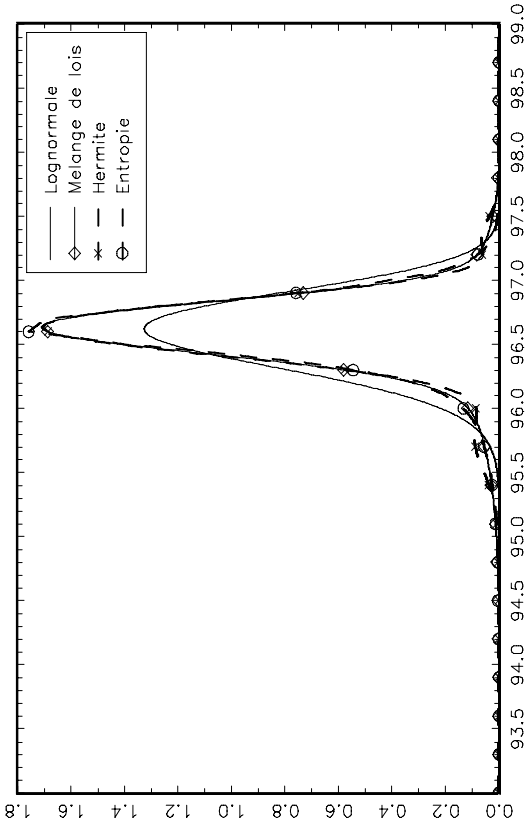
Smile de Volatilité pour les options sur Notionnel 970526



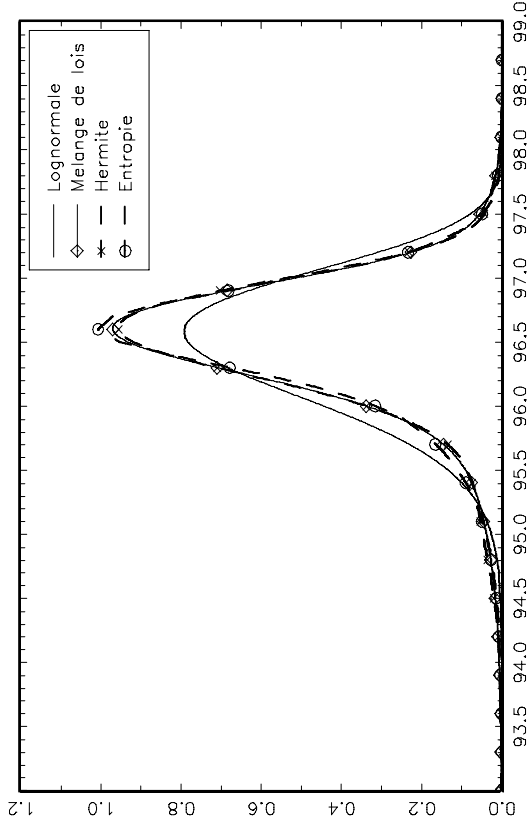
Comparaison des DNR pour les options PIBOR
Date: 970414 Maturite: 1



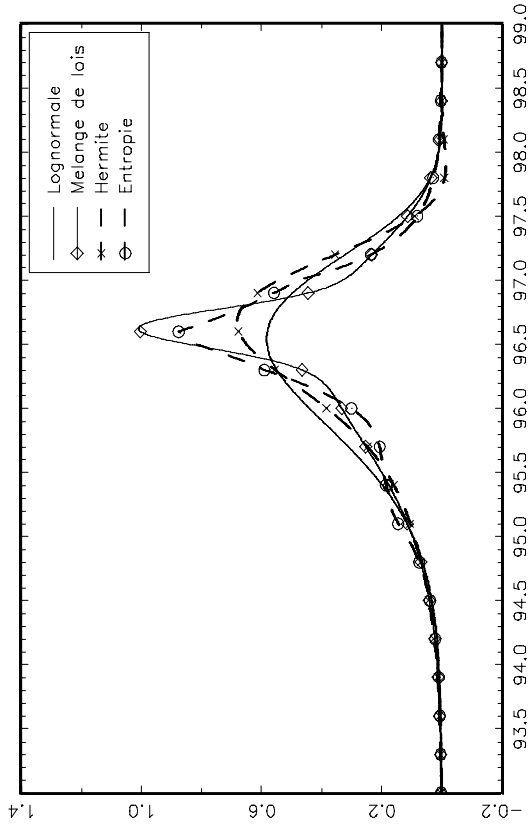
Comparaison des DNR pour les options PIBOR
Date: 970414 Maturite: 2



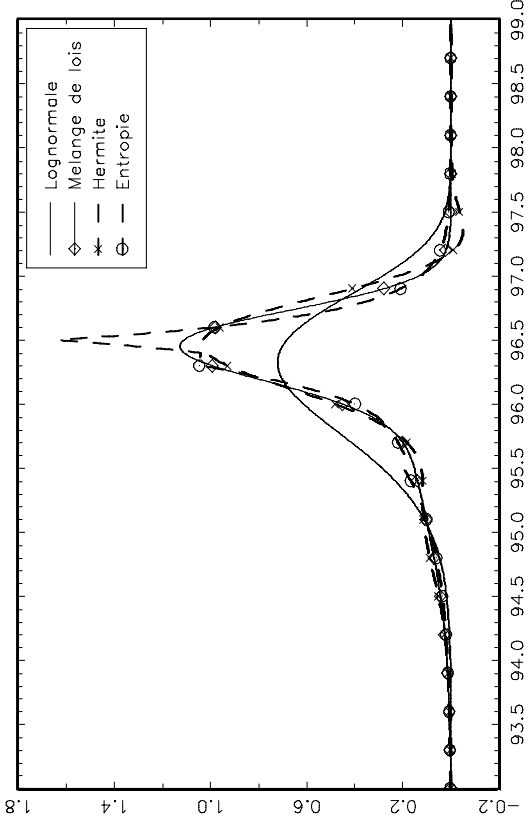
Comparaison des DNR pour les options PIBOR
Date: 970414 Maturite: 3



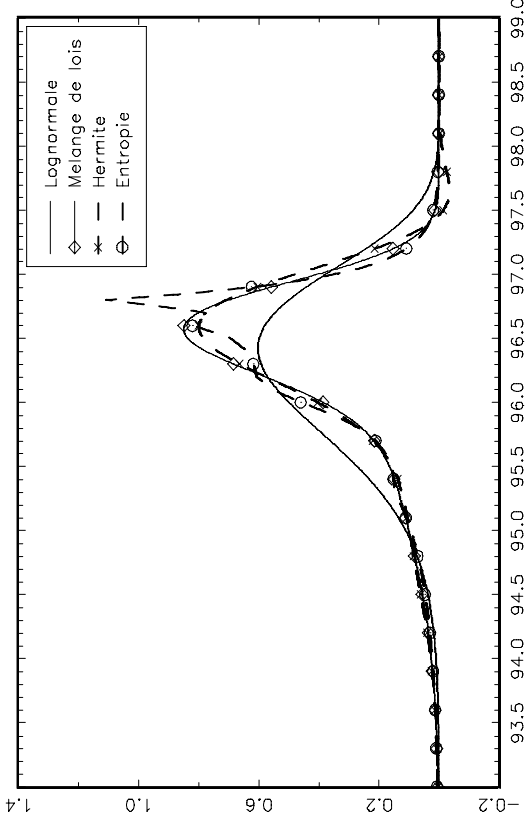
Comparaison des DNR pour les options PIBOR
Date: 970414 Maturite: 4



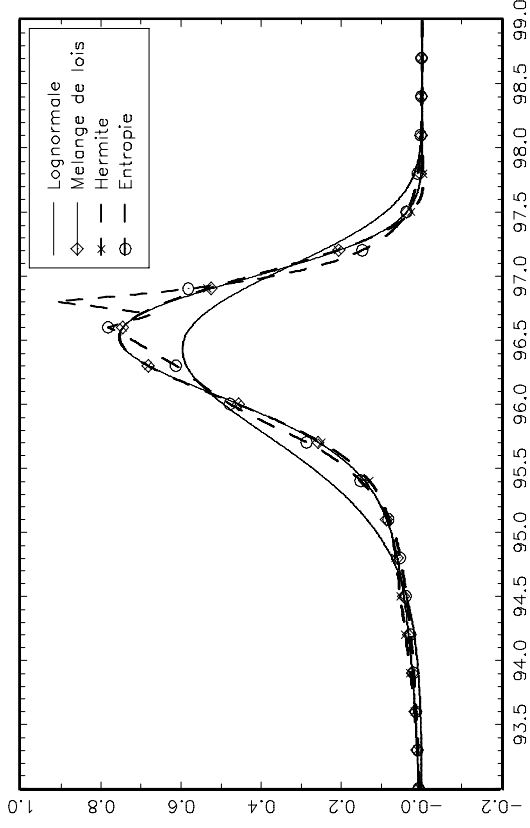
Comparaison des DNR pour les options PIBOR
Date: 970526 Maturite: 1



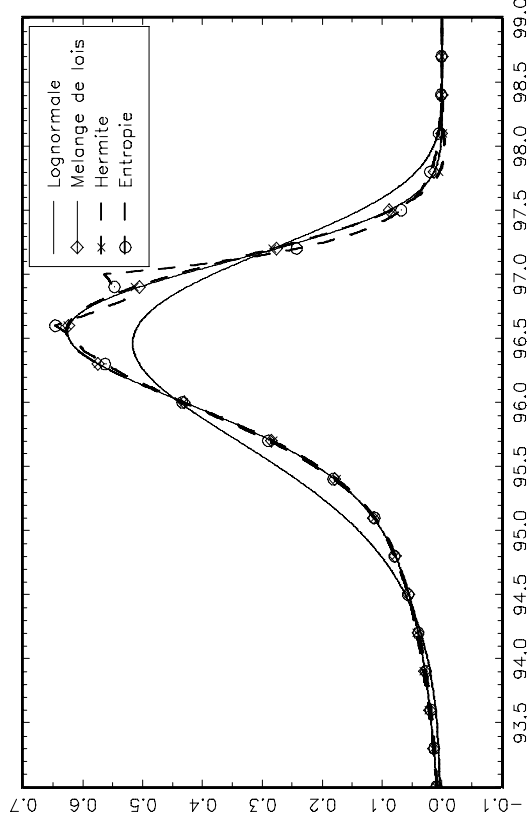
Comparaison des DNR pour les options PIBOR
Date: 970526 Maturite: 2



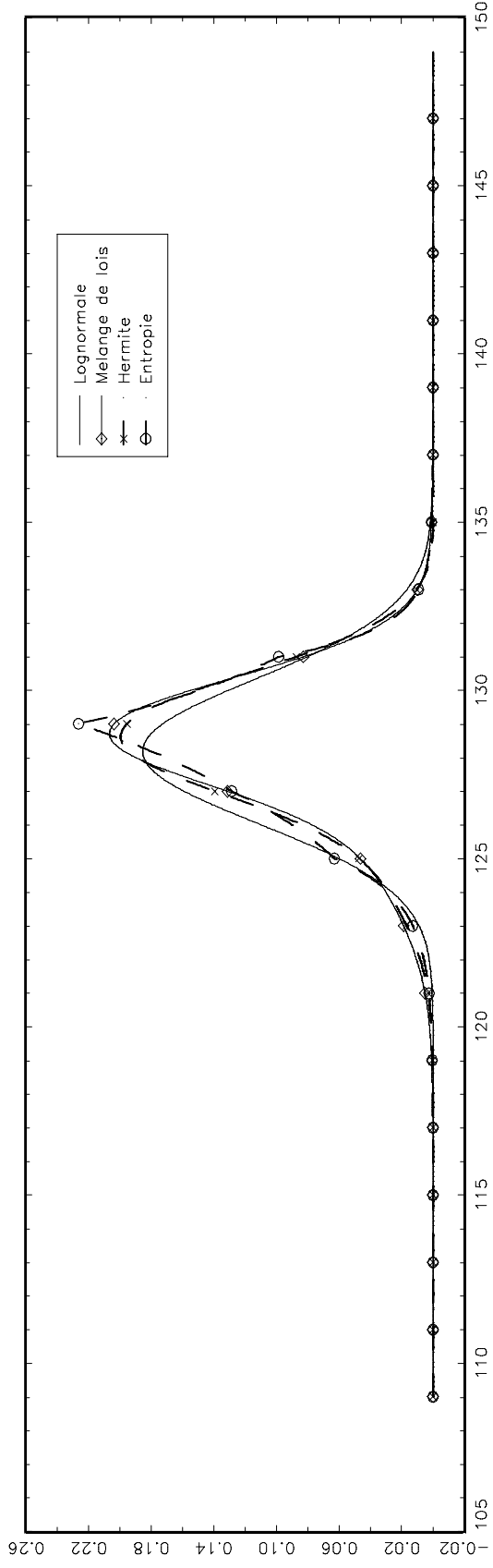
Comparaison des DNR pour les options PIBOR
Date: 970526 Maturite: 3



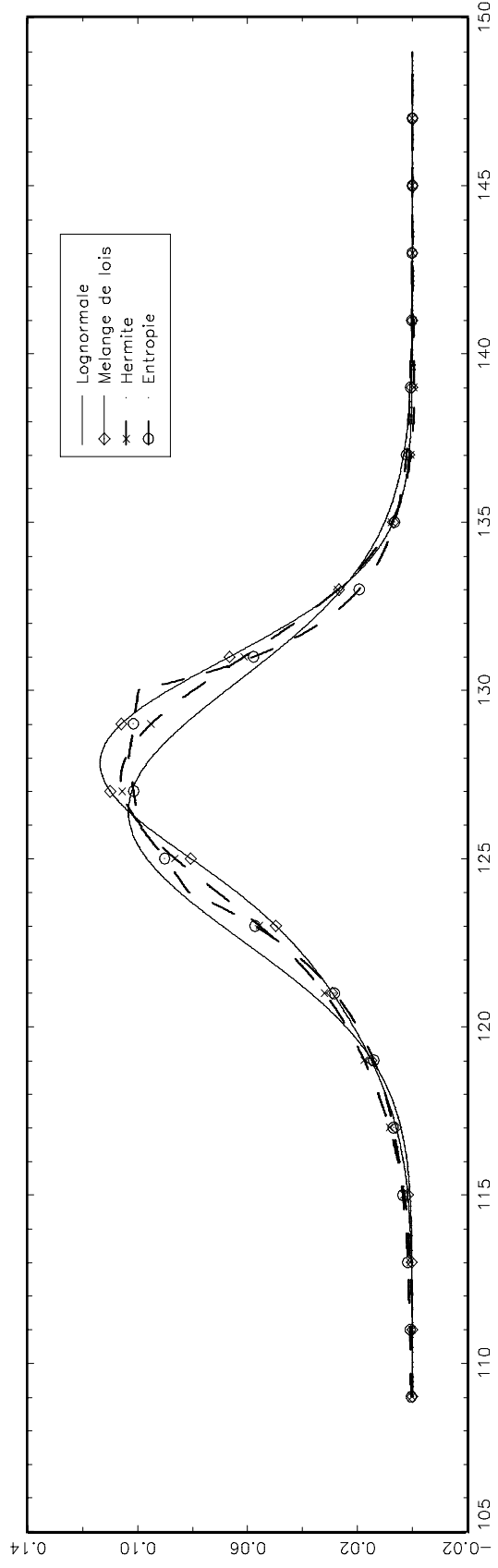
Comparaison des DNR pour les options PIBOR
Date: 970526 Maturite: 4



Comparaison des DNR pour les options sur National
Date: 970414 Maturite: 1

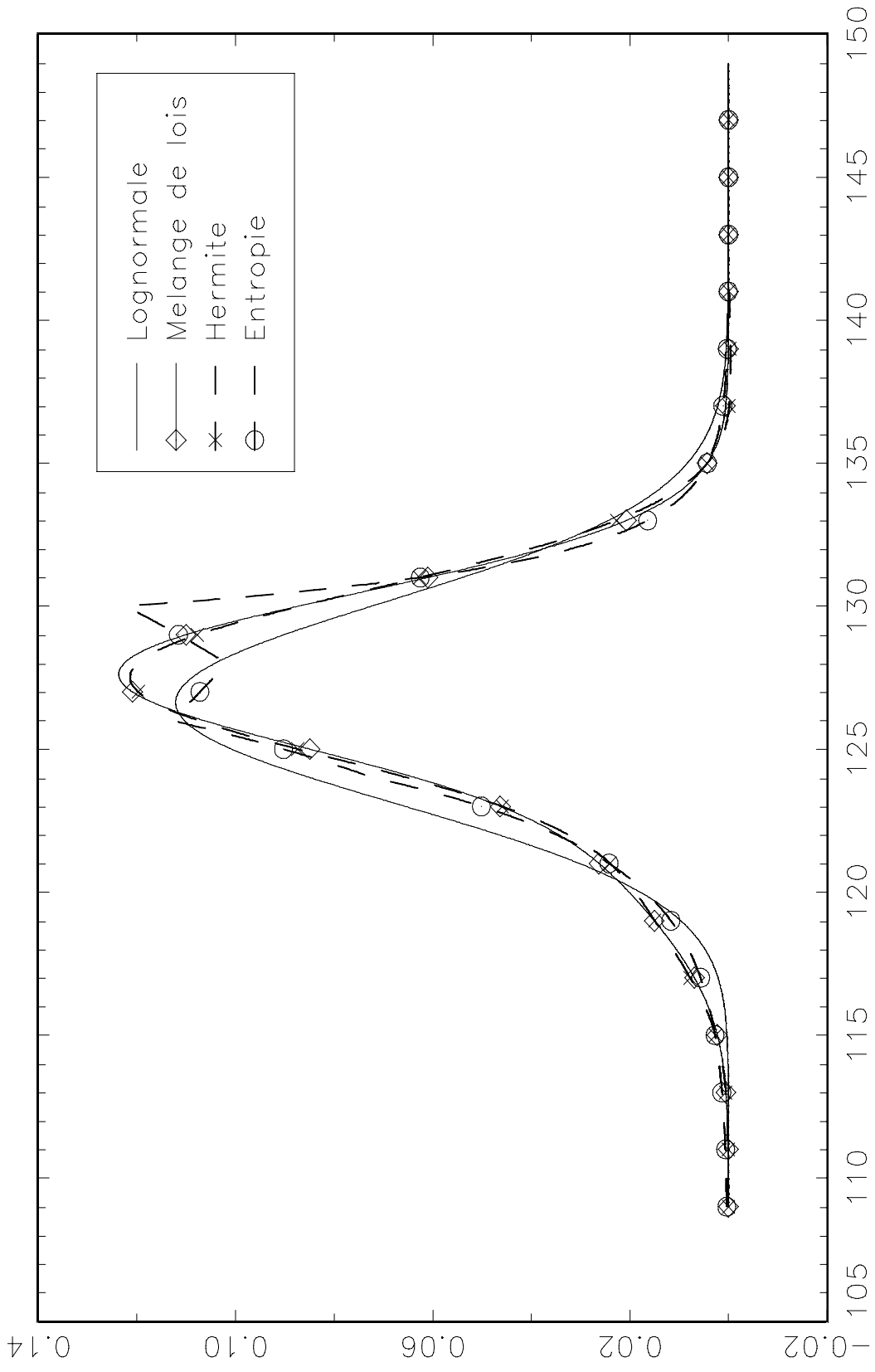


Comparaison des DNR pour les options sur National
Date: 970414 Maturite: 2

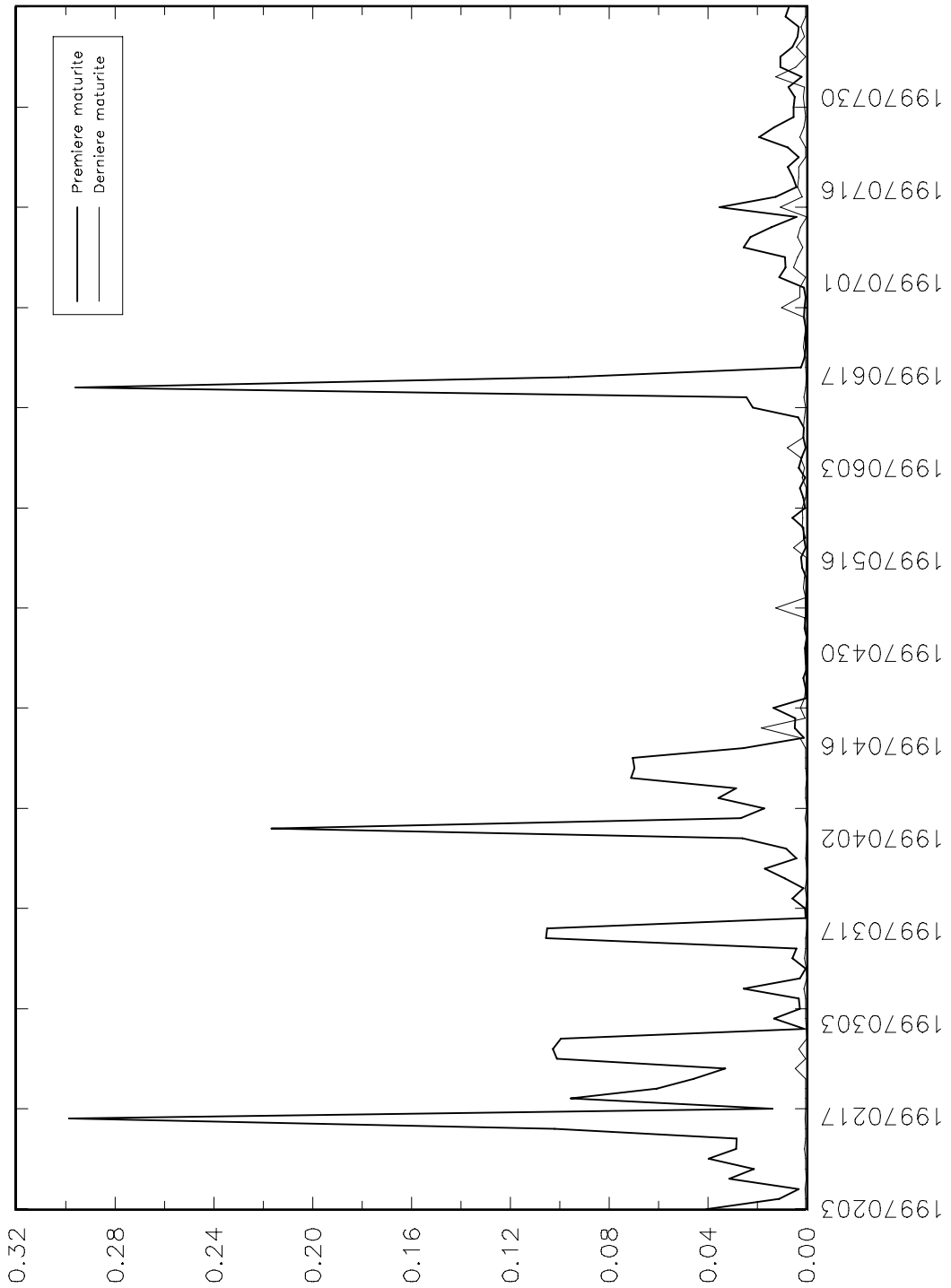


Comparaison des DNR pour les options sur Notionnel

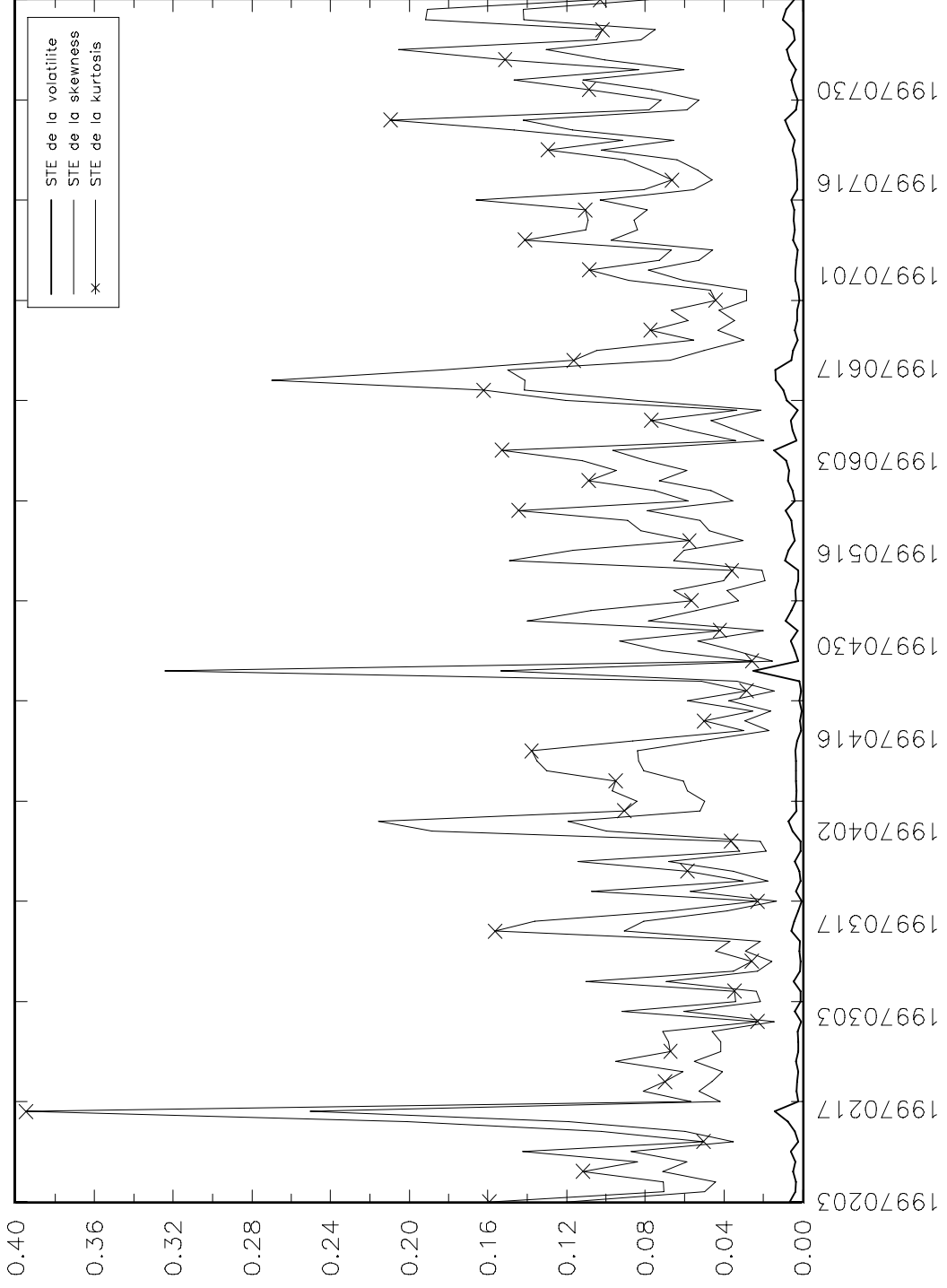
Date: 970526 Maturite: 1



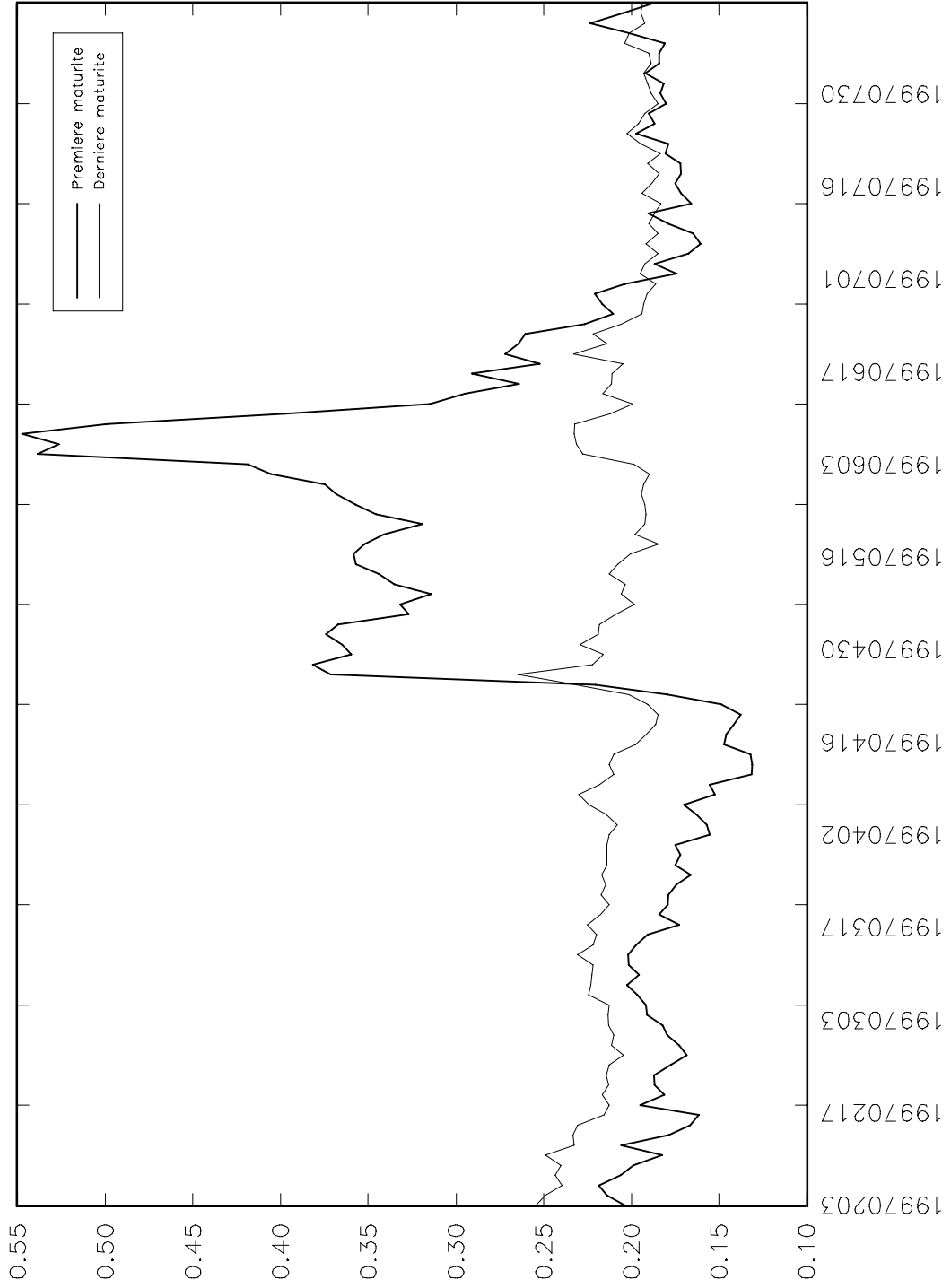
ARE pour les options PIBOR



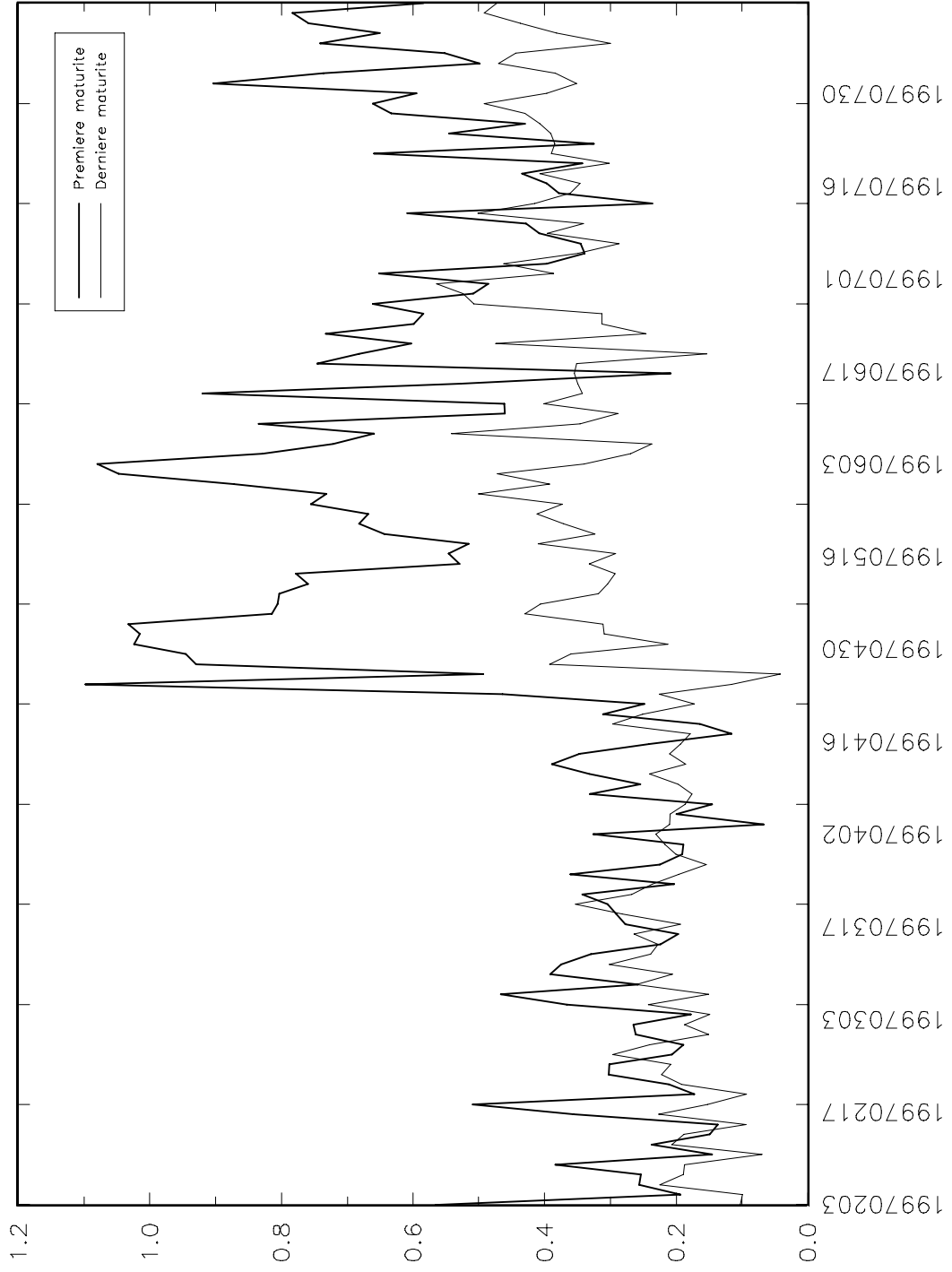
STE des paramètres pour les options PIBOR



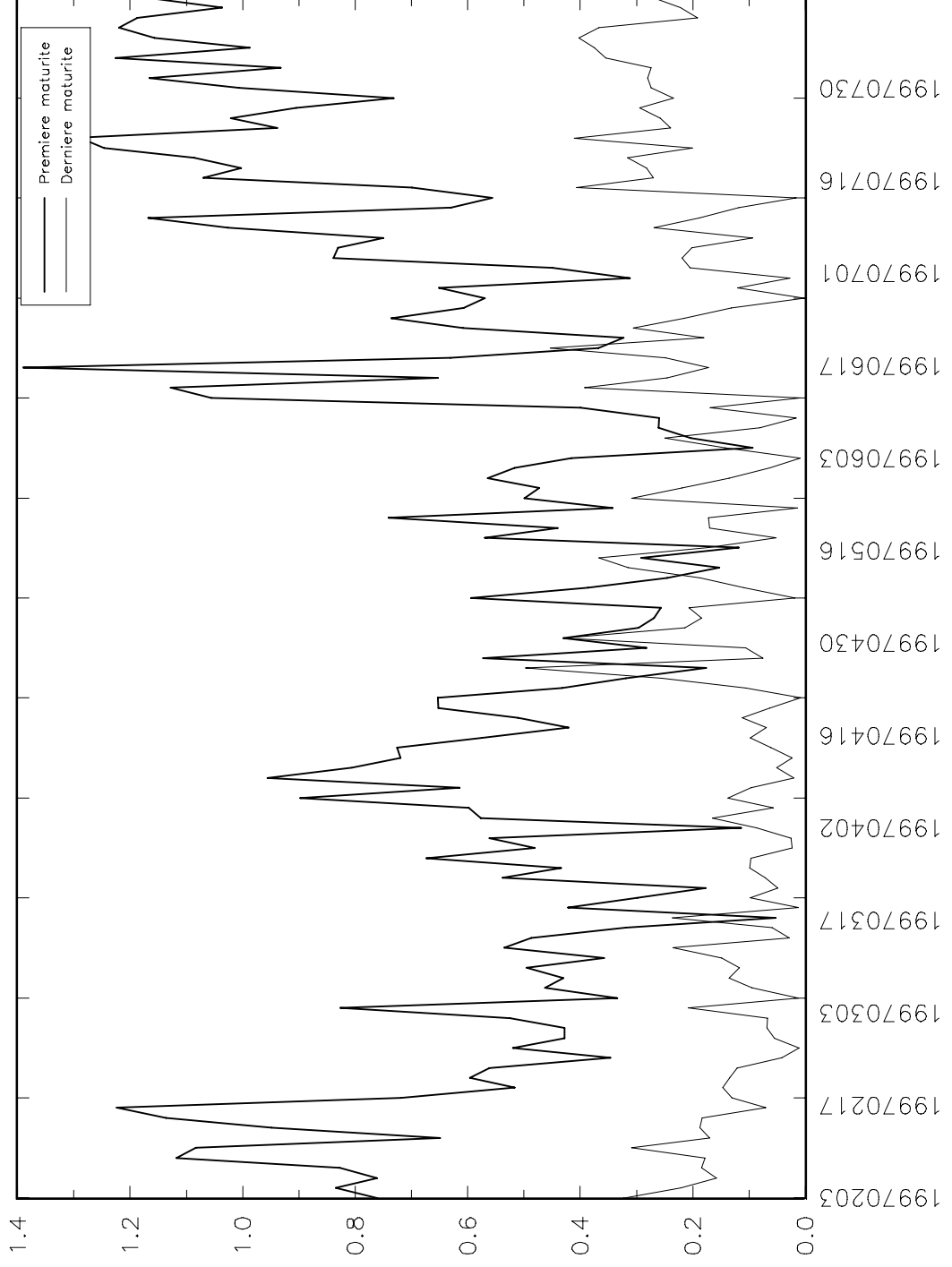
Prix de la volatilité pour les options PIBOR



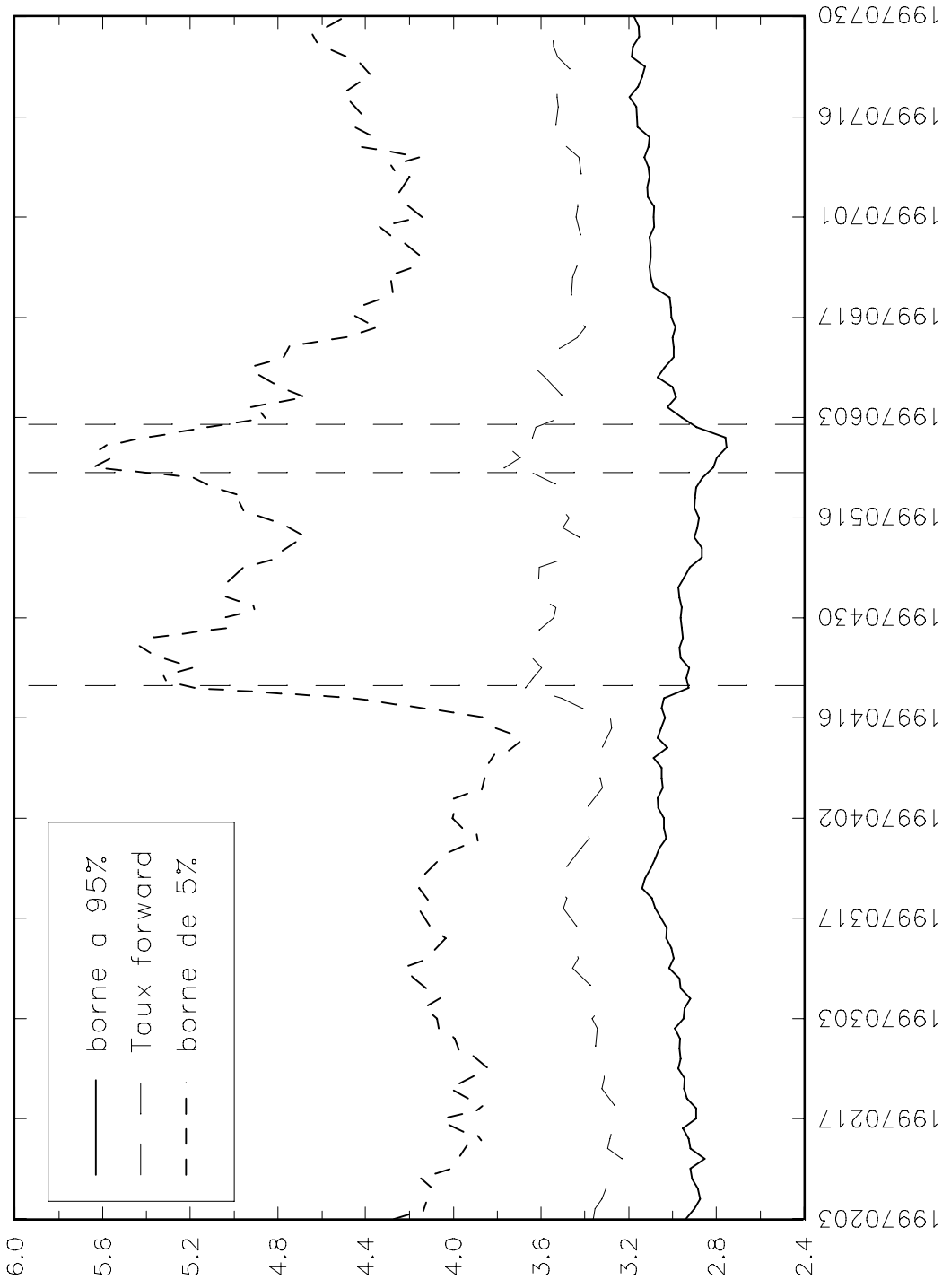
Prix de la skewness pour les options PIBOR



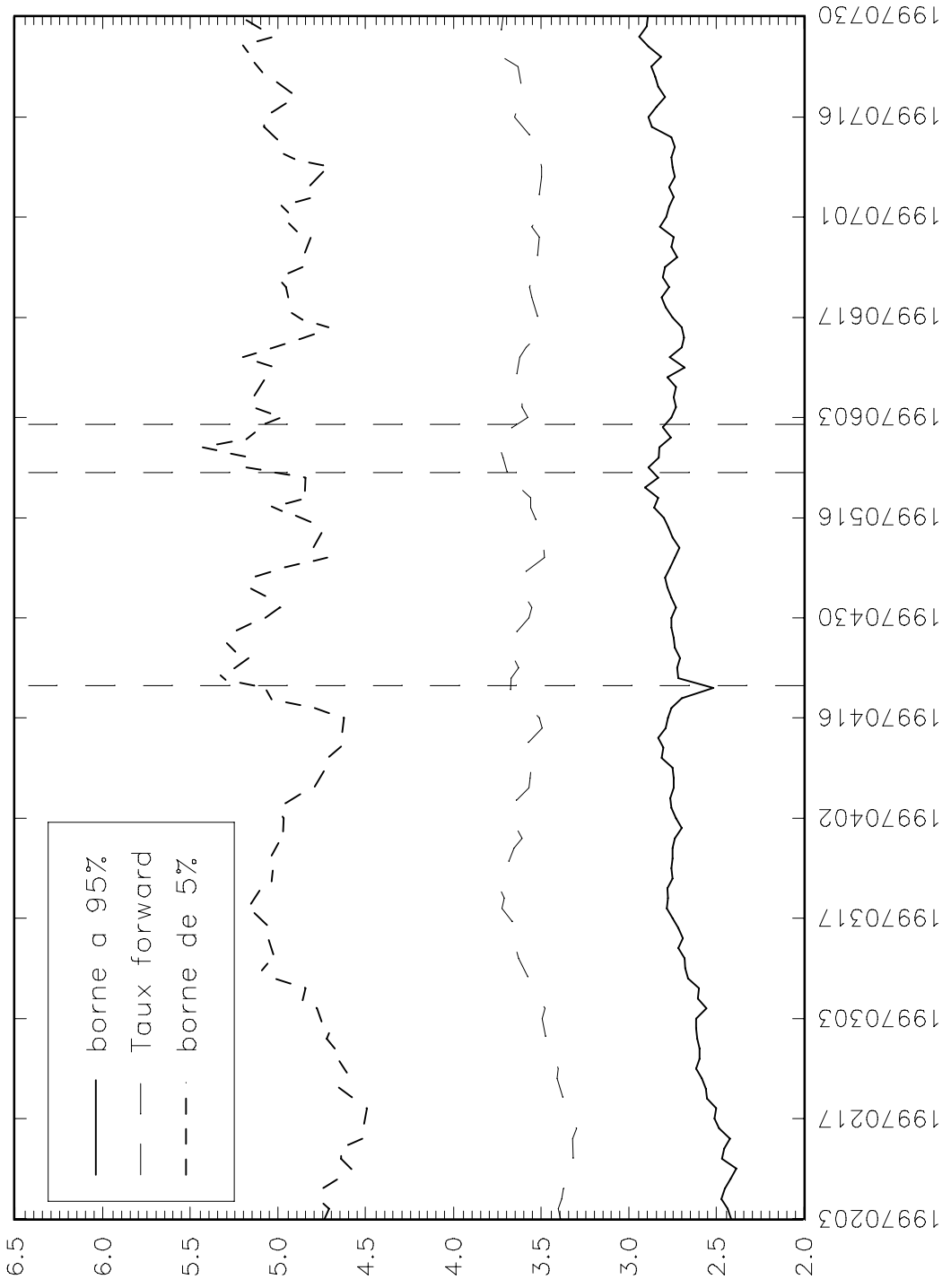
Prix de la kurtosis pour les options PIBOR



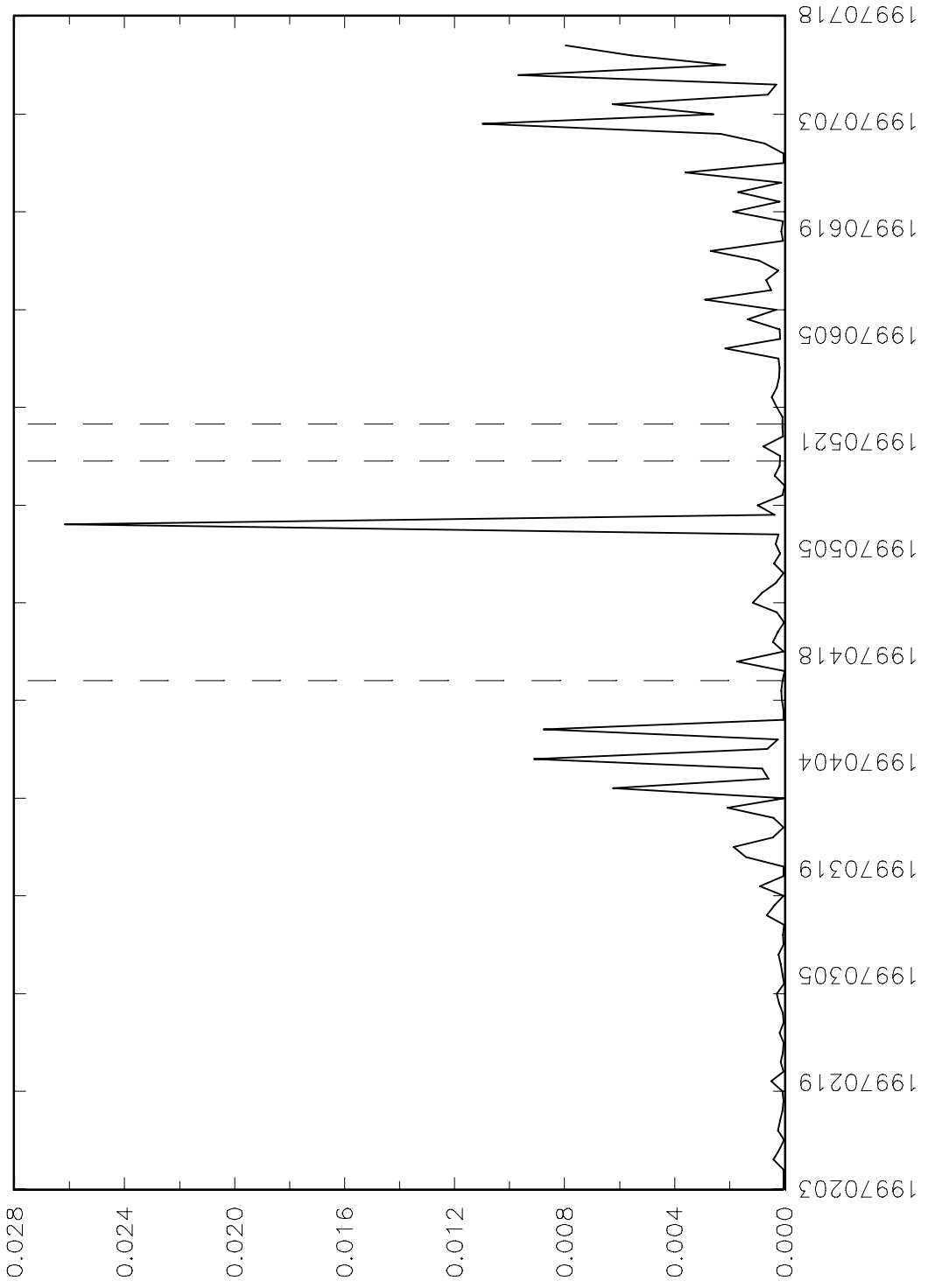
Taux forward et intervalles de confiance de 95% pour les options PIBOR standardises de maturite 90 jours



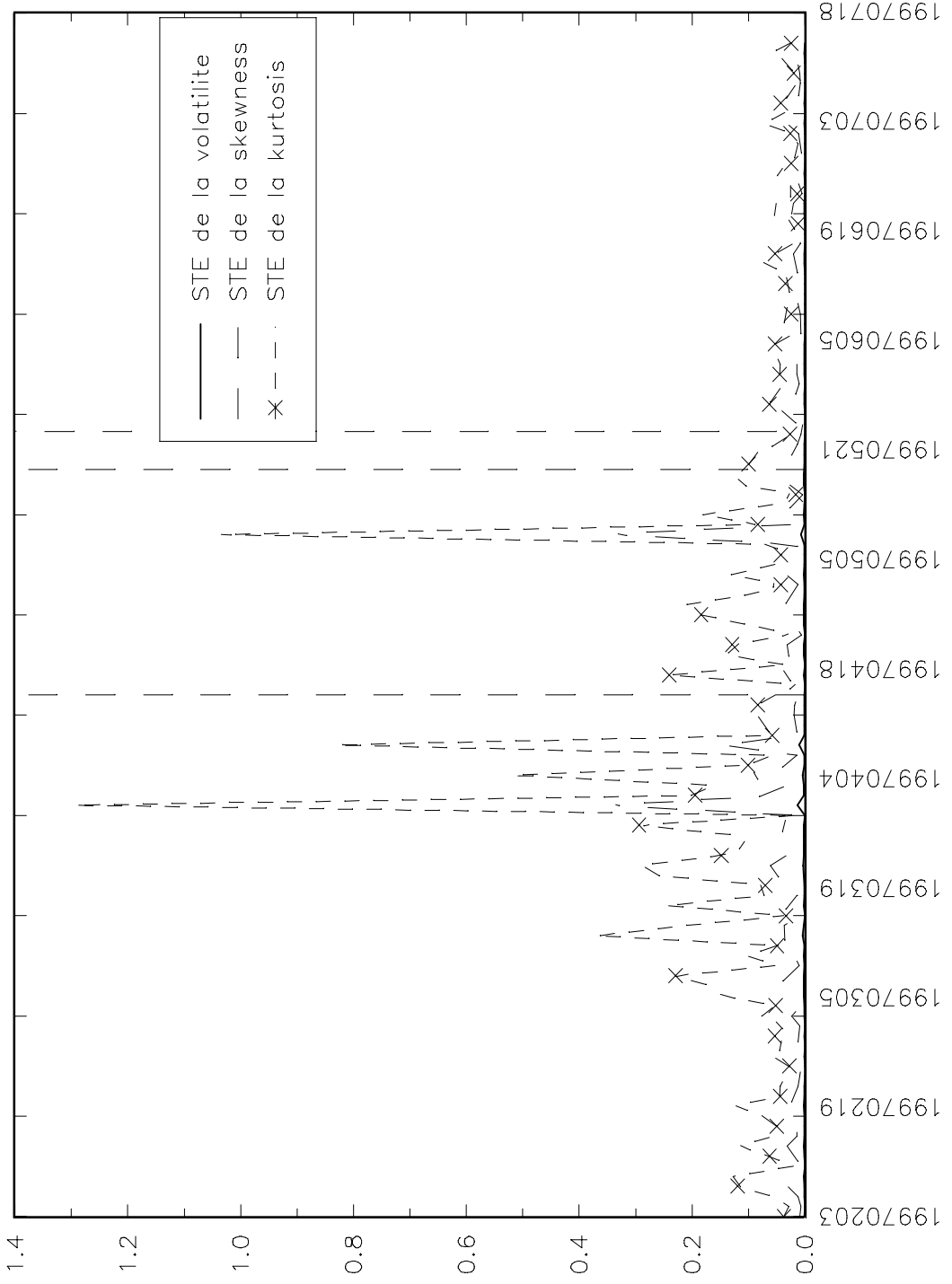
Taux forward et intervalles de confiance de 95% pour les options PIBOR standardises de maturite 270 jours



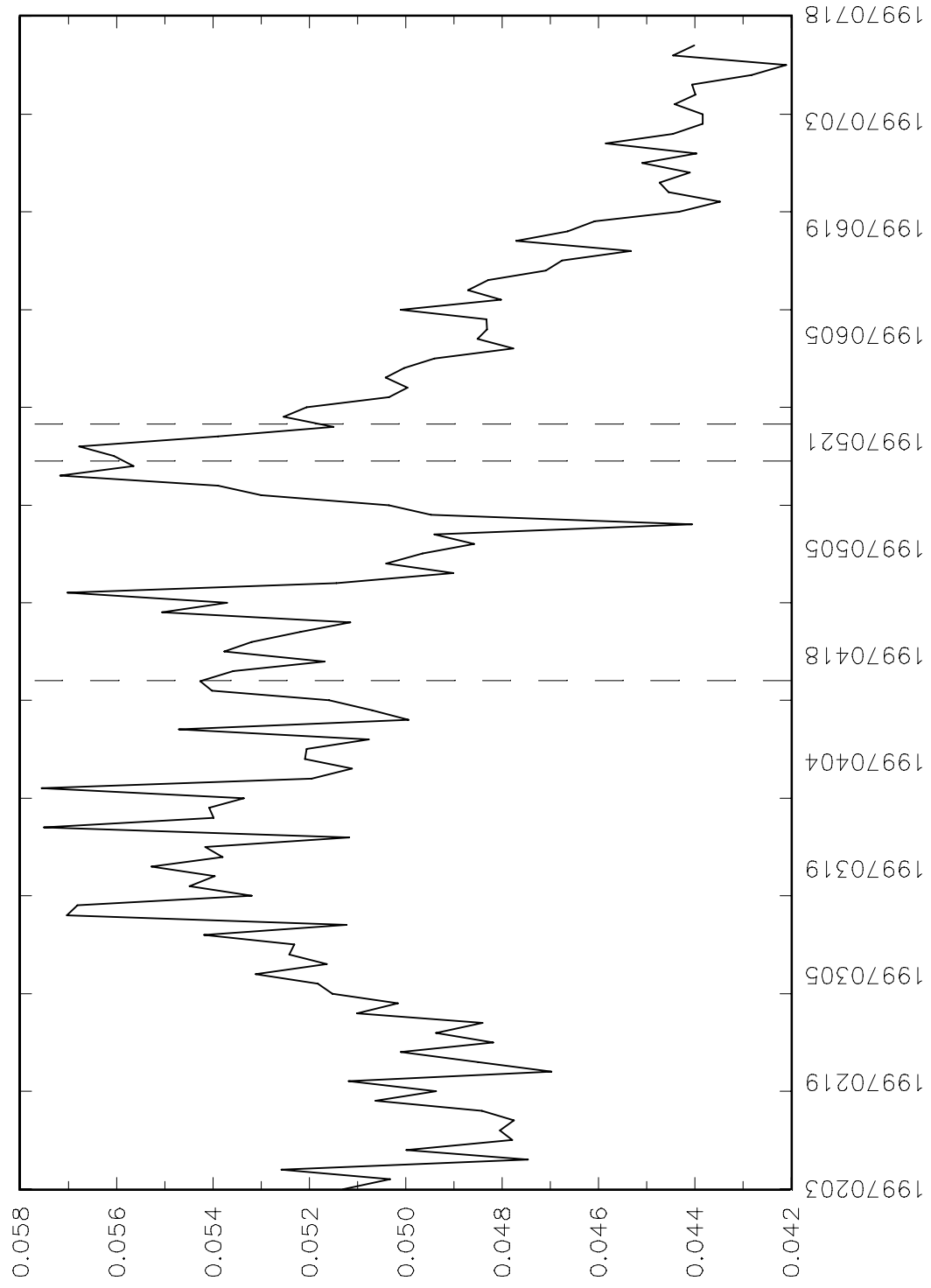
ARE pour les options sur Notionnel



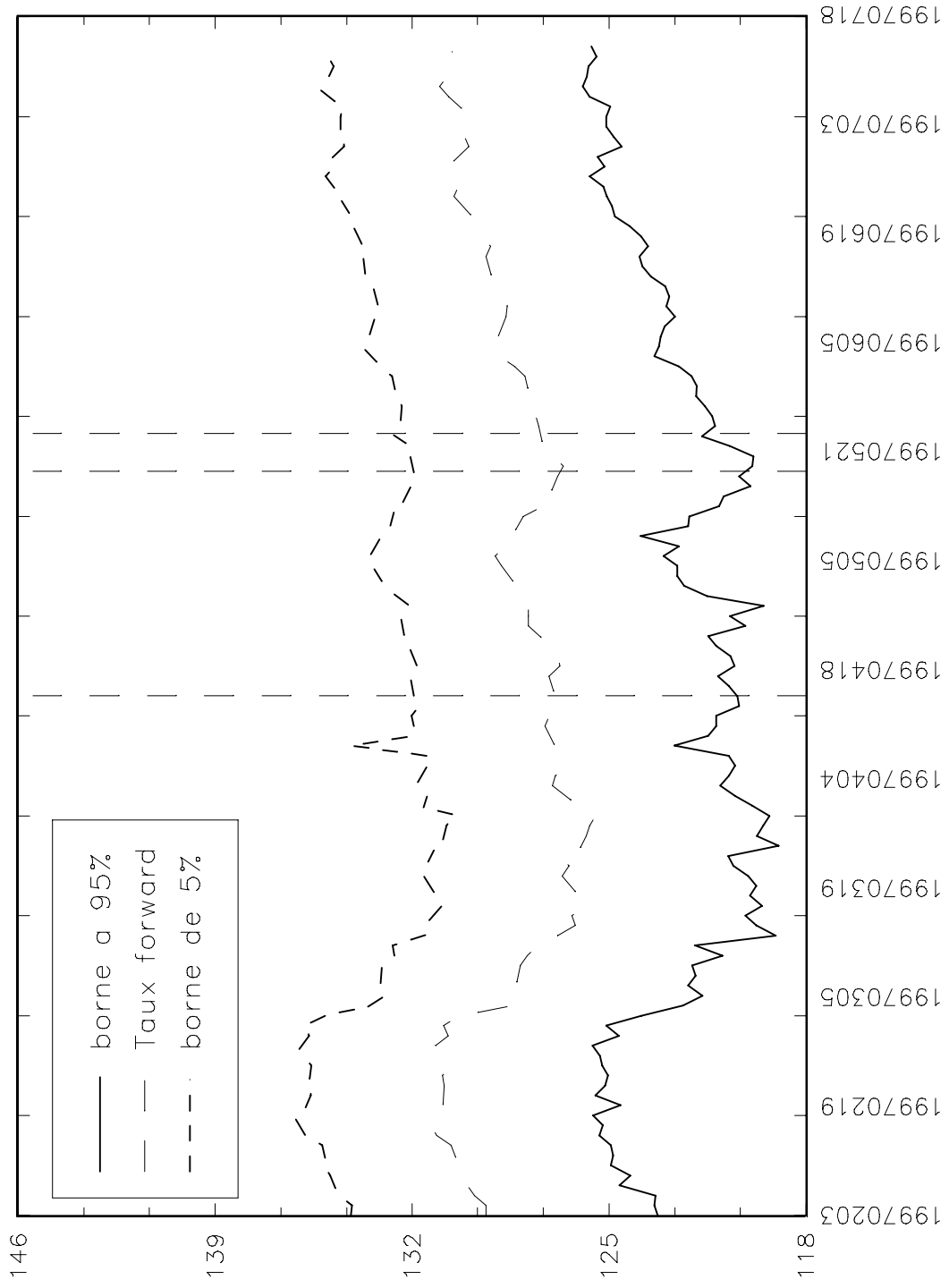
STE des paramètres pour les options sur Notionnel



Volatilité des options sur Notionnel



Taux forward et intervalle de confiance de 95% pour les options sur Notionnel standardises de maturite 90 jours



Notes d'Études et de Recherche

1. C. Huang and H. Pagès, "Optimal Consumption and Portfolio Policies with an Infinite Horizon: Existence and Convergence," May 1990.
2. C. Bordes, « Variabilité de la vitesse et volatilité de la croissance monétaire : le cas français », février 1989.
3. C. Bordes, M. Driscoll and A. Sauviat, "Interpreting the Money-Output Correlation: Money-Real or Real-Real?," May 1989.
4. C. Bordes, D. Goyeau et A. Sauviat, « Taux d'intérêt, marge et rentabilité bancaires : le cas des pays de l'OCDE », mai 1989.
5. B. Bensaid, S. Federbusch et R. Gary-Bobo, « Sur quelques propriétés stratégiques de l'intéressement des salariés dans l'industrie », juin 1989.
6. O. De Bandt, « L'identification des chocs monétaires et financiers en France : une étude empirique », juin 1990.
7. M. Boutillier et S. Dérangère, « Le taux de crédit accordé aux entreprises françaises : coûts opératoires des banques et prime de risque de défaut », juin 1990.
8. M. Boutillier and B. Cabrillac, "Foreign Exchange Markets: Efficiency and Hierarchy," October 1990.
9. O. De Bandt et P. Jacquinot, « Les choix de financement des entreprises en France : une modélisation économétrique », octobre 1990 (English version also available on request).
10. B. Bensaid and R. Gary-Bobo, "On Renegotiation of Profit-Sharing Contracts in Industry," July 1989 (English version of NER n° 5).
11. P. G. Garella and Y. Richelle, "Cartel Formation and the Selection of Firms," December 1990.
12. H. Pagès and H. He, "Consumption and Portfolio Decisions with Labor Income and Borrowing Constraints," August 1990.
13. P. Sicsic, « Le franc Poincaré a-t-il été délibérément sous-évalué ? », octobre 1991.
14. B. Bensaid and R. Gary-Bobo, "On the Commitment Value of Contracts under Renegotiation Constraints," January 1990 revised November 1990.
15. B. Bensaid, J.-P. Lesne, H. Pagès and J. Scheinkman, "Derivative Asset Pricing with Transaction Costs," May 1991 revised November 1991.
16. C. Monticelli and M.-O. Strauss-Kahn, "European Integration and the Demand for Broad Money," December 1991.
17. J. Henry and M. Phelipot, "The High and Low-Risk Asset Demand of French Households: A Multivariate Analysis," November 1991 revised June 1992.
18. B. Bensaid and P. Garella, "Financing Takeovers under Asymmetric Information," September 1992.

19. A. de Palma and M. Uctum, "Financial Intermediation under Financial Integration and Deregulation," September 1992.
20. A. de Palma, L. Leruth and P. Régibeau, "Partial Compatibility with Network Externalities and Double Purchase," August 1992.
21. A. Frachot, D. Janci and V. Lacoste, "Factor Analysis of the Term Structure: a Probabilistic Approach," November 1992.
22. P. Sicsic et B. Villeneuve, « L'Afflux d'or en France de 1928 à 1934 », janvier 1993.
23. M. Jeanblanc-Picqué and R. Avesani, "Impulse Control Method and Exchange Rate," September 1993.
24. A. Frachot and J.-P. Lesne, "Expectations Hypothesis and Stochastic Volatilities," July 1993 revised September 1993.
25. B. Bensaïd and A. de Palma, "Spatial Multiproduct Oligopoly," February 1993 revised October 1994.
26. A. de Palma and R. Gary-Bobo, "Credit Contraction in a Model of the Banking Industry," October 1994.
27. P. Jacquinet et F. Mihoubi, « Dynamique et hétérogénéité de l'emploi en déséquilibre », septembre 1995.
28. G. Salmat, « Le retournement conjoncturel de 1992 et 1993 en France : une modélisation V.A.R. », octobre 1994.
29. J. Henry and J. Weidmann, "Asymmetry in the EMS Revisited: Evidence from the Causality Analysis of Daily Eurorates," February 1994 revised October 1994.
30. O. De Bandt, "Competition Among Financial Intermediaries and the Risk of Contagious Failures," September 1994 revised January 1995.
31. B. Bensaïd et A. de Palma, « Politique monétaire et concurrence bancaire », janvier 1994 révisé en septembre 1995.
32. F. Rosenwald, « Coût du crédit et montant des prêts : une interprétation en terme de canal large du crédit », septembre 1995.
33. G. Cette et S. Mahfouz, « Le partage primaire du revenu : constat descriptif sur longue période », décembre 1995.
34. H. Pagès, "Is there a Premium for Currencies Correlated with Volatility ? Some Evidence from Risk Reversals," January 1996.
35. E. Jondeau and R. Ricart, "The Expectations Theory : Tests on French, German and American Euro-rates," June 1996.
36. B. Bensaïd et O. De Bandt, « Les stratégies "stop-loss" : théorie et application au Contrat Notionnel du Matif », juin 1996.

37. C. Martin et F. Rosenwald, « Le marché des certificats de dépôts. Écarts de taux à l'émission : l'influence de la relation émetteurs-souscripteurs initiaux », avril 1996.
38. Banque de France - CEPREMAP - Direction de la Prévision - Erasme - INSEE - OFCE, « Structures et propriétés de cinq modèles macroéconomiques français », juin 1996.
39. F. Rosenwald, « L'influence des montants émis sur le taux des certificats de dépôts », octobre 1996.
40. L. Baumel, « Les crédits mis en place par les banques AFB de 1978 à 1992 : une évaluation des montants et des durées initiales », novembre 1996.
41. G. Cette et E. Kremp, « Le passage à une assiette valeur ajoutée pour les cotisations sociales : Une caractérisation des entreprises non financières "gagnantes" et "perdantes" », novembre 1996.
42. S. Avouyi-Dovi, E. Jondeau et C. Lai Tong, « Effets "volume", volatilité et transmissions internationales sur les marchés boursiers dans le G5 », avril 1997.
43. E. Jondeau et R. Ricart, « Le contenu en information de la pente des taux : Application au cas des titres publics français », juin 1997.
44. B. Bensaid et M. Boutillier, « Le contrat notionnel : Efficience et efficacité », juillet 1997.
45. E. Jondeau et R. Ricart, « La théorie des anticipations de la structure par terme : test à partir des titres publics français », septembre 1997.
46. E. Jondeau, « Représentation VAR et test de la théorie des anticipations de la structure par terme », septembre 1997.
47. E. Jondeau et M. Rockinger, « Estimation et interprétation des densités neutres au risque : Une comparaison de méthodes », octobre 1997.
48. L. Baumel et P. Sevestre, « La relation entre le taux de crédits et le coût des ressources bancaires. Modélisation et estimation sur données individuelles de banques », octobre 1997.
49. P. Sevestre, "On the Use of Banks Balance Sheet Data in Loan Market Studies : A Note," October 1997.
50. P.-C. Hautcoeur and P. Sicsic, "Threat of a Capital Levy, Expected Devaluation and Interest Rates in France during the Interwar Period," January 1998.
51. P. Jacquinot, « L'inflation sous-jacente à partir d'une approche structurelle des VAR : une application à la France, à l'Allemagne et au Royaume-Uni », janvier 1998.
52. C. Bruneau et O. De Bandt, « La modélisation VAR structurel : application à la politique monétaire en France », janvier 1998.
53. C. Bruneau and E. Jondeau, "Long-Run Causality, with an Application to International Links between Long-Term Interest Rates," June 1998.
54. S. Coutant, E. Jondeau and M. Rockinger, "Reading Interest Rate and Bond Futures Options' Smiles: How PIBOR and Notional Operators Appreciated the 1997 French Snap Election," June 1998.

Pour tous commentaires ou demandes sur les Notes d'Études et de Recherche, contacter la bibliothèque du Centre de recherche à l'adresse suivante :

For any comment or enquiries on the Notes d'Études et de Recherche, contact the library of the Centre de recherche at the following address:

BANQUE DE FRANCE
41.1391 - Centre de recherche
75 049 Paris CEDEX
tél : 01 42 92 49 59